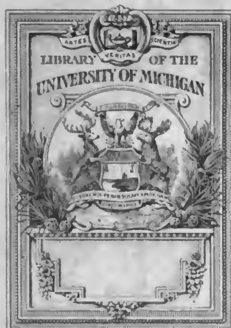

ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANNÉE 1816.

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS CE VOLUME,

Qui est le premier *de la Collection des Mémoires de l'Académie des sciences, depuis l'ordonnance du* 21 *mars* 1816.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

ANNÉE 1816.

TOME Ier.



A PARIS,

Chez FIRMIN DIDOT, Imprimeur du Roi et de l'Institut, et Libraire pour les Mathématiques, rue Jacob, n° 24.

M. DCCC. XVIII.

ORDONNANCE
DU ROI

CONCERNANT LA NOUVELLE ORGANISATION DE L'INSTITUT.

Au Château des Tuileries, le 21 mars 1816.

LOUIS, par la grace de Dieu, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE, à tous ceux qui ces présentes verront, SALUT.

La protection que les Rois nos aïeux ont constamment accordée aux sciences et aux lettres, nous a toujours fait considérer avec un intérêt particulier les divers établissemens qu'ils ont fondés pour honorer ceux qui les cultivent : aussi n'avons-nous pu voir sans douleur la chûte de ces académies, qui avaient si puissamment contribué à la prospérité des lettres, et dont la fondation a été un titre de gloire pour nos augustes prédécesseurs. Depuis l'époque où elles ont été rétablies sous une dénomination nouvelle, nous avons vu, avec une vive satisfaction, la considération et la renommée que

l'Institut a méritées en Europe. Aussitôt que la divine Providence nous a rappelé sur le trône de nos pères, notre intention a été de maintenir et de protéger cette savante compagnie; mais nous avons jugé convenable de rendre à chacune de ses classes son nom primitif, afin de rattacher leur gloire passée à celle qu'elles ont acquise, et afin de leur rappeler à-la-fois ce qu'elles ont pu faire dans des temps difficiles, et ce que nous devons en attendre dans des jours plus heureux.

Enfin nous nous sommes proposé de donner aux académies une marque de notre royale bienveillance, en associant leur établissement à la restauration de la monarchie, et en mettant leur composition et leurs statuts en accord avec l'ordre actuel de notre gouvernement :

A CES CAUSES, et sur le rapport de notre ministre secrétaire d'état au département de l'intérieur;

Notre Conseil d'état entendu,

NOUS AVONS ORDONNÉ et ORDONNONS ce qui suit :

ART. 1er. L'Institut sera composé de quatre académies, dénommées ainsi qu'il suit, et selon l'ordre de leur fondation, savoir :

L'académie française;
L'académie royale des inscriptions et belles-lettres;
L'académie royale des sciences;
L'académie royale des beaux-arts.

2. Les académies sont sous la protection directe et spéciale du Roi.

3. Chaque académie aura son régime indépendant, et la

libre disposition des fonds qui lui sont ou lui seront spécialement affectés.

4. Toutefois l'agence, le secrétariat, la bibliothèque et les autres collections de l'Institut demeureront communs aux quatre académies.

5. Les propriétés communes aux quatre académies, et les fonds y affectés, seront régis et administrés, sous l'autorité de notre ministre secrétaire d'état au département de l'intérieur, par une commission de huit membres, dont deux seront pris dans chaque académie.

Ces commissaires seront élus chacun pour un an, et seront toujours rééligibles.

6. Les propriétés et fonds particuliers de chaque académie seront régis en son nom par les bureaux ou commissions institués ou à instituer, et dans les formes établies par les réglemens.

7. Chaque académie disposera, selon ses convenances, du local affecté aux séances publiques.

8. Elles tiendront une séance publique commune le 24 avril, jour de notre rentrée dans notre royaume.

9. Les membres de chaque académie pourront être élus aux trois autres académies.

10. L'académie française reprendra ses anciens statuts, sauf les modifications que nous pourrions juger nécessaires, et qui nous seront présentées, s'il y a lieu, par notre ministre secrétaire d'état au département de l'intérieur.

11. L'académie française est et demeure composée ainsi qu'il suit (1).

(1) *Voyez* l'Annuaire de 1817.

12. L'académie royale des inscriptions et belles-lettres conservera l'organisation et les réglemens actuels de la troisième classe de l'Institut.

13. L'académie royale des inscriptions et belles-lettres est et demeure composée ainsi qu'il suit. (1)

14. L'académie royale des sciences conservera l'organisation et la distribution en sections de la première classe de l'Institut.

15. L'académie royale des sciences est et demeure composée ainsi qu'il suit. (2)

16. L'académie royale des beaux-arts conservera l'organisation et la distribution en sections de la quatrième classe de l'Institut.

17. L'académie royale des beaux-arts est et demeure composée ainsi qu'il suit. (1)

18. Il sera ajouté, tant à l'académie royale des inscriptions et belles-lettres, qu'à l'académie royale des sciences, une classe d'académiciens libres, au nombre de dix pour chacune de ces deux académies.

19. Les académiciens libres n'auront d'autre indemnité que celle du droit de présence.

Ils jouiront des mêmes droits que les autres académiciens, et seront élus selon les formes accoutumées.

20. Les anciens honoraires et académiciens, tant de l'académie royale des sciences, que de l'académie royale des

(1) *Voyez* l'Annuaire de 1817.

(2) *Voyez* ci-après pag. *xj*.

inscriptions et belles-lettres, seront, de droit, académiciens libres de l'académie à laquelle ils ont appartenu.

Ces académies feront les élections nécessaires pour compléter le nombre de dix académiciens libres dans chacune d'elles.

21. L'académie royale des beaux-arts aura également une classe d'académiciens libres, dont le nombre sera déterminé par un réglement particulier, sur la proposition de l'académie elle-même.

22. Notre ministre secrétaire d'état au département de l'intérieur, soumettra à notre approbation les modifications qui pourraient être jugées nécessaires dans les réglemens de la première, de la troisième, et de la quatrième classe de l'Institut, pour adapter lesdits réglemens à l'académie royale des inscriptions et belles-lettres, à l'académie royale des sciences, et à l'académie royale des beaux-arts.

23. Il sera, chaque année, alloué au budget de notre ministre secrétaire d'état de l'intérieur, un fonds général et suffisant pour payer les traitemens conservés et indemnités aux membres, secrétaires perpétuels, et employés, des quatre classes de l'Institut, ainsi que pour les divers travaux littéraires, les expériences, impressions, prix, et autres objets.

Le fonds sera réparti entre chacune des quatre académies qui composent l'Institut, selon la nature de leurs travaux, et de manière à ce que chacune d'elles ait la libre jouissance de ce qui sera assigné pour son service.

24. Tous les membres qui ont appartenu jusqu'à ce jour à l'une des quatre classes de l'Institut, conserveront la totalité de leur traitement.

25. Sont maintenus les décrets et réglemens qui ne contiennent aucune disposition contraire à celles de la présente ordonnance.

26. Notre ministre secrétaire d'état au département de l'intérieur est chargé de l'exécution de la présente ordonnance.

Donné au château des Tuileries, le 21 mars de l'an de grace 1816, et de notre règne le vingt-unième. *Signé* LOUIS.

Par le Roi :

Le ministre secrétaire d'état de l'intérieur,
Signé VAUBLANC.

Certifié conforme par nous

Garde des sceaux de France, ministre secrétaire d'état au département de la justice, BARBÉ-MARBOIS.

ÉTAT ACTUEL
DE L'ACADÉMIE ROYALE
DES SCIENCES.

(Au 21 mars 1816.)

SECTION Ire. — *Géométrie.*

Messieurs

Le marquis de LAPLACE (Pierre-Sim.).
LEGENDRE (Adrien-Marie).
LACROIX (Sylvestre-François).
BIOT (Jean-Baptiste).
POINSOT (Louis).
AMPÈRE (André-Marie).

SECTION II. — *Mécanique.*

PÉRIER (Jacques-Constantin).
De PRONY (Gaspard-Clair-François-Marie-Riche).
Le baron SANÉ (Jacques-Noël).
MOLARD (Claude-Pierre).
CAUCHY (Augustin-Louis).
BREGUET (Abraham-Louis).

SECTION III. — *Astronomie.*

MESSIER (Charles).
Le comte de CASSINI (Jean-Dominiq.).
LE FRANÇAIS-LALANDE (Michel-Jean-Jérôme).
BOUVARD (Alexis).
BURCKHARDT (Jean-Charles).
ARAGO (François-Jean-Dominique).

SECTION IV. — *Géographie et Navigation.*

BUACHE (Jean-Nicolas).
BEAUTEMPS-BEAUPRÉ (Charl.-Franç.).
De ROSSEL (Elisab.-Paul-Edouard).

SECTION V. — *Physique générale.*

ROCHON (Alexis-Marie).
CHARLES (Jacq.-Alexandre-César).
LEFÈVRE-GINEAU (Louis).
GAY-LUSSAC (Louis-Joseph).
POISSON (Siméon-Denis).
GIRARD (Pierre-Simon).

SECTION VI. — *Chimie.*

Le comte BERTHOLLET (Claude-Louis).
Le chevalier VAUQUELIN (Nicolas).
DEYEUX (Nicolas).
Le comte CHAPTAL (Jean-Antoine).
THÉNARD (Louis-Jacques).
PROUST (Joseph-Louis).

SECTION VII. — *Minéralogie.*

SAGE Balthasar-George).
HAUY (René-Just).
DUHAMEL (Guillot).
LELIEVRE (Claude-Hugues).
Le baron RAMOND (Louis-François-Elisabeth).
BRONGNIART (Alexandre).

SECTION VIII. — *Botanique.*

DE JUSSIEU (Antoine-Laurent).
DE LAMARCK (Jean-Baptiste-Pierre-Antoine DEMONET).
DESFONTAINES (René).
LABILLARDIÈRE (Jacques-Julien).
PALISSOT-BEAUVOIS (Ambroise-Marie-François-Joseph).
MIRBEL (Charles-Franç. BRISSEAU).

SECTION IX. — *Économie rurale.*

TESSIER (Henri-Alexandre).
THOUIN (André).
HUZARD (Jean-Baptiste).
SILVESTRE (Augustin-François).
BOSC (Louis-Augustin-Guillaume).
YVART (Jean-Augustin-Victor).

SECTION X. — *Anatomie et Zoologie.*

Le comte DE LACÉPÈDE (Bernard-Germain-Étienne).
RICHARD (Louis-Claude).
PINEL (Philippe).
Le chevalier GEOFFROY SAINT-HILAIRE (Étienne).
LATREILLE (Pierre-André).
DUMÉRIL (André-Marie-Constant).

SECTION XI. — *Médecine et Chirurgie.*

Le chevalier PORTAL (Antoine).
Le chevalier HALLÉ (Jean-Noël).
Le chevalier PELLETAN (Phil^pe-Jean).
Le baron PERCY (Pierre-François).
Le baron CORVISART (Jean-Nicolas).
DESCHAMPS (Joseph-François-Louis).

SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Le chevalier DELAMBRE (Jean-Baptiste-Joseph), pour les sciences mathématiques.
Le chevalier CUVIER (George-Léopold-Chrétien-Frédéric-Dagobert), pour les sciences physiques.

HISTOIRE

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie Royale des Sciences, pendant l'année 1816.

PARTIE MATHÉMATIQUE.

PAR M. LE CH^er DELAMBRE, SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

JAMAIS peut-être le zèle des géomètres n'a été plus soutenu, jamais peut-être ils ne se sont livrés avec plus de constance à leurs travaux accoutumés, au développement de leurs premières idées, à l'achèvement des ouvrages déja publiés en partie; et cependant jamais nous n'avons trouvé tant de difficultés à la rédaction de l'histoire annuelle de l'Académie. Réduits presque uniquement à nos seuls souvenirs pour annoncer des Mémoires que les auteurs ont retirés pour les revoir ou les étendre, ou qu'ils ont déja livrés à l'impression, pour accélérer de tout leur pouvoir la publication du volume qui va commencer une nouvelle série, sous le titre de *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, nous ne pouvons qu'indiquer brièvement les dif-

férens objets qui ont rempli nos séances pendant l'année qui vient de s'écouler. D'ailleurs, plus les mathématiques auront fait des progrès, plus les progrès ultérieurs deviendront difficiles, et plus nous éprouverons l'impossibilité de rendre frappans et sensibles les résultats nouvellement obtenus. Les problèmes se compliquent, l'énoncé même des théorèmes exige une attention soutenue pour en bien saisir le sens; les applications de l'analyse à la physique qui, après l'explication complète du système du monde, faisaient l'espoir des mathématiciens, ne leur ont offert que des problèmes encore plus hérissés de difficultés; les expériences même sont loin d'être aussi simples que l'étaient celles qui, les premières, ont fait connaître la nature et les principaux phénomènes de la lumière ou de l'électricité, il faut les répéter soi-même, et bien étudier les appareils nécessaires, si l'on veut se faire une idée des vérités nouvelles qui sont le fruit de ces recherches, qui exigent autant de patience que de sagacité. Ainsi, quoique pour les savans de profession la somme des travaux soit toujours la même, la partie dont il nous est possible de rendre compte doit diminuer de jour en jour.

On sera donc peu surpris, si nous nous bornons à donner simplement les titres de plusieurs Mémoires, malgré l'importance des sujets et le mérite que les auteurs ont su donner à l'exécution. Dans cette classe, nous sommes malgré nous forcés de ranger:

1° Un grand Mémoire de M. Poisson, *sur la Variation des Constantes arbitraires.*

2° Les *Formules* de M. Cauchy, *relatives à la détermination des intégrales définies*, et *la Conversion des différences finies des puissances en intégrales de cette espèce*, et sa Démonstration d'un théorème curieux sur les Nombres, de laquelle il fait découler, comme simple corollaire, une propriété remarquable des fractions ordinaires, observée par M. J. Farey. Et de plus un Mémoire sur les Solutions particulières, et un autre sur les Racines imaginaires des équations.

3° Deux grands Mémoires et plusieurs notes sur la diffraction, par MM. Pouillet, et Biot, qui les a insérés dans son Traité de Physique, auquel nous consacrerons un article particulier.

4° Divers Mémoires de M. Biot, sur *le son des anches dans les instrumens de musique*, sur *l'intonation des tuyaux d'orgue remplis de différens gaz*, sur *la pile et l'électricité*; la description d'un colorigraphe, et ses *Nouvelles Expériences sur la Polarisation de la Lumière.*

(On sait que M. Arago s'occupe de son côté de recherches sur ce dernier objet, dont il a plusieurs fois entretenu l'Académie, et qu'il se propose de réunir en un seul ouvrage, dès qu'il les aura complétées.)

5° Enfin, les Notes lues par M. le comte Laplace, *sur la Vitesse du son dans diverses substances*, *sur l'Action réciproque des Pendules*, et *sur une attention négligée jusqu'ici dans les expériences qui servent à la détermination de la longueur du pendule simple.*

De toutes les expériences de ce genre, tentées en différens temps par les géomètres, les astronomes et les physiciens les plus distingués, celles de Borda sont regardées généralement comme les plus sûres et les plus concluantes, soit par les attentions nouvelles, les procédés ingénieux, la grandeur de l'appareil, soit enfin par l'habileté bien connue de cet excellent observateur.

On convient que c'est avec grande raison qu'il a préféré la suspension à couteau, qu'il a crue plus susceptible de précision que la suspension à pince, *parce que, dans celle-ci, on a toujours quelque incertitude sur le vrai point autour duquel se font les oscillations, au lieu que dans l'autre, le tranchant du couteau étant très-vif, le centre du mouvement peut être censé dans le plan même sur lequel il pose.* Cette supposition que Borda s'était permise, et qui lui a été long-temps accordée sans réclamation, a depuis fait naître quelques doutes. On a pensé que le tranchant ne pouvait jamais être *assez vif* pour être considéré comme une

ligne mathématique, qu'il devait bien plutôt être traité comme un petit cylindre dont le centre était plus élevé que la ligne de contact, en sorte que le rayon de ce cylindre aurait dû s'ajouter à la longueur mesurée. La question méritait d'être examinée, et, si l'on ne pouvait se flatter de déterminer exactement le rayon de ce cylindre, et la correction qu'il nécessiterait, on pouvait du moins estimer à-peu-près cette correction, et connaître les limites de l'erreur qu'on avait à craindre. C'est ce que M. le comte Laplace vient de soumettre à un calcul dont le résultat a dû le surprendre lui-même, puisqu'il a trouvé que ce rayon, quel qu'il puisse être, doit se retrancher, et non s'ajouter à la longueur mesurée; mais cette longueur est environ quatre fois celle du pendule, et cela suffit peut-être pour légitimer la supposition de Borda, mais c'est en même temps un avertissement utile à tous les savans qui se proposeront de répéter l'expérience avec des pendules beaucoup moins longs.

Outre ces Notes diverses, qui toutes sont des applications heureuses des principes généraux qu'il a posés dans sa Mécanique Céleste, M. le comte Laplace a fait des supplémens et des augmentations utiles à sa Théorie Analytique des Probabilités, et à l'Essai Philosophique, sur le même sujet, dont la troisième édition a paru il y a quelques mois.

L'auteur termine cet ouvrage par cette réflexion, qu'*il n'est point de science plus digne de nos méditations*, et *qu'il soit plus utile de faire entrer dans le système de l'instruction publique*. Cette vue philosophique a été saisie par M. Lacroix, qui d'ailleurs avait pu la trouver dans les écrits d'un géomètre célèbre qui s'est, à plusieurs reprises, exercé sur ce sujet difficile autant qu'intéressant, et elle a donné naissance à l'ouvrage suivant qui complétera le Cours de Mathématiques du même auteur.

Traité Élementaire du Calcul des Probabilités, par S. F. Lacroix, Paris, madame veuve Courcier, 1816. Quand le génie a créé une

science nouvelle, ou que par une analyse savante il en a reculé les limites, il est du devoir de tout homme qui s'est livré particulièrement à l'instruction publique, et à qui toutes les parties de la géométrie moderne sont également familières, de lire, de commenter les ouvrages originaux, d'en extraire tout ce qu'on peut rendre accessible à l'intelligence moins exercée des lecteurs ordinaires, de chercher des démonstrations directes et particulières des théorêmes les plus utiles que l'inventeur a trouvés par des méthodes plus générales et plus fécondes, mais plus difficiles à bien comprendre. C'est ce qu'on trouvera dans l'ouvrage nouveau de M. Lacroix, qui a su y répandre tout l'intérêt dont la matière est susceptible, par des exemples bien choisis, par les nombreuses citations qu'il a faites des écrits originaux, par le soin d'assigner à chacun la part qu'il peut légitimement réclamer, et par l'histoire détaillée des travaux de ce genre, exécutés par les plus grands géomètres, depuis l'âge de Pascal et de Fermat jusqu'à nos jours.

Depuis l'époque de la suppression de l'Académie des Sciences, qui est à-peu-près celle où M. Legendre a publié son premier Mémoire sur les Transcendantes Elliptiques, ce profond géomètre n'a cessé d'étendre, chaque année, cette théorie, qu'il avait pour ainsi dire créée, et dont il a exposé la doctrine dans ses Exercices du Calcul Intégral, auxquels il a déja publié plusieurs supplémens. Le dernier, qui a paru au mois de juillet 1816, a pour objet la construction des *Tables Elliptiques*.

En indiquant aux géomètres tout le parti qu'on pouvait tirer des transcendantes de cette espèce, l'auteur avait annoncé que ses solutions ne deviendraient véritablement usuelles qu'au moyen de tables où ces fonctions pourraient être évaluées dans tous les cas avec un degré d'approximation convenable, et sans exiger des calculs trop pénibles, enfin des tables qui fussent pour l'analyse ce que sont à-peu-près pour l'astronomie les

tables des sinus, des tangentes, et des logarithmes des nombres. C'est la construction de ces tables qui fait l'objet principal du supplément nouveau que M. Legendre vient d'ajouter à son ouvrage.

La première de ces Tables offre 900 valeurs de quarts d'ellipse, et un pareil nombre de valeurs de la fonction analogue F', dont 420 au moins ont été calculées directement jusqu'à 14 décimales, les autres l'ont été jusqu'à 12. Ces transcendantes sont donc maintenant connues plus exactement que ne l'était la circonférence du cercle avant les calculs de Ludolph Van Ceulen. On y a joint les différences 1re, 2e et 3e, et l'on a réduit le tout à 12 décimales. Jusqu'à 70° de l'argument, la 3e différence qui n'était d'abord que d'une seule figure significative, s'est accrue progressivement jusqu'à devenir 6778 pour E' et 25284 pour la fonction F'; il a donc été nécessaire d'y ajouter les 4es différences qui sont alors 49 et 362, et croissent ensuite jusqu'à 485 160 et 5 706 908 015, qui sont les derniers nombres de ces deux colonnes.

La Table II donne les valeurs des fonctions E, calculées à 12 décimales pour toutes les amplitudes φ de demi-degré en demi-degré, depuis 0° jusqu'à 90°, l'angle de module étant 45°.

Cette Table est de même terminée à la douzième décimale, et présente les différences 1, 2, 3, 4 et 5e.

La Table III contient les sinus naturels à 15 décimales, et leurs logarithmes jusqu'à 14, pour tous les arcs de 15 en 15 minutes; elle est un extrait des grandes Tables de Briggs.

La Table IV donne les valeurs logarithmiques de tangente $(45° \pm \varphi)$ pour tous les angles de 30 en 30' depuis 0° jusqu'à 90°, à 12 décimales avec cinq ordres de différences.

A la fin de cette Table on trouve neuf corrections pour les logarithmes à 20 décimales, de l'édition donnée à Avignon, par Pézénas. Sur quoi nous remarquerons que de ces neuf logarithmes

deux seulement se trouvent dans l'édition anglaise de Gardiner, et qu'ils y sont corrects; ils se trouvent tous, et pareillement exempts de fautes dans l'édition *stéréotype* de Callet.

Enfin, pour étendre l'usage de cette Table de logarithmes à 20 décimales, M. Legendre a extrait des grandes Tables du Cadastre (déposées au Bureau des Longitudes, et dont la notice se trouve dans les Mémoires de l'Institut, tome V), les logarithmes à 19 décimales de tous les nombres impairs, depuis 1163 jusqu'à 1501, et de tous les nombres premiers, de 1501 à 10000.

Il nous est impossible de donner ici une idée des moyens employés par l'auteur, soit pour la construction, soit pour la vérification, et même l'interpolation de ses Tables, si on desirait leur donner plus d'étendue. Il nous suffira de dire que rien n'a été épargné pour faciliter le travail à ceux qui voudraient construire un système complet de *Tables Elliptiques*. L'auteur « ose espérer « que cette entreprise, dont l'utilité se fera sentir de plus en plus, « sera mise un jour à exécution par quelqu'un de ces hommes « laborieux qui apparaissent de temps en temps dans la carrière « des sciences, pour laisser des monumens durables de leur pa- « tience et de leur zèle. »

A l'occasion de ces nouvelles Tables, l'auteur a fait des recherches pour faciliter l'interpolation des grandes Tables trigonométriques, telles que celles de Briggs, de Rhéticus, et de Vlacq. Il les a publiées dans la Connaissance des Temps de 1819. Par les moyens qu'il indique, on pourra trouver à 14 décimales le sinus, le cosinus et la tangente de tout arc, ou l'arc qui répond à une ligne trigonométrique donnée quelconque.

Dans les cas les plus ordinaires, où l'on n'a pas besoin de ce grand nombre de décimales, les formules se simplifient et peuvent devenir utiles et commodes dans les calculs trigonométriques qui exigent quelques attentions particulières.

A la suite de ce Mémoire on trouve une formule d'une élégance

remarquable pour calculer la latitude d'une planète, en secondes, et en fonction de la tangente de la demi-inclinaison. L'auteur la déduit d'une formule plus générale, démontrée à l'article 116 de la cinquième partie des Exercices de calcul intégral; elle peut se déduire plus simplement encore de la série que Lagrange a donnée pour l'angle que fait, en un point quelconque, l'écliptique avec le parallèle à l'équateur. Cette série peut se transporter à la déclinaison du soleil, ainsi que nous l'avons fait remarquer (Astronomie, tome II, page 239); dans ce cas, pour avoir la déclinaison du soleil en fonction de l'ascension droite A, il suffit de mettre $(90^{\circ}-A)$ à la place de la longitude L de la formule de Lagrange, et l'on a pour la déclinaison D la formule

$$D = 2 \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}\omega \,\text{sin.}\, A + \tfrac{2}{3} \,\text{tang.}^{3}\, \tfrac{1}{2}\omega \,\text{sin.}\, 3A + \tfrac{2}{5} \,\text{tang.}^{5}\, \tfrac{1}{2}\omega \,\text{sin.}\, 5A + \text{etc.}$$

Nous avons même calculé à l'endroit cité les coëfficiens numériques des premiers termes dont le cinquième peut toujours se négliger. Le seul inconvénient de cette formule est qu'elle donne la déclinaison en fonction de l'ascension droite, ou la latitude en fonction de l'argument réduit à l'écliptique, au lieu qu'on les cherche ordinairement en fonction de la longitude ou de l'argument non réduit de latitude. C'est ce qui nous a fait chercher une série qui n'eût pas cet inconvénient; elle s'est trouvée beaucoup plus convergente encore, mais les coëfficiens n'ont pas la même simplicité.

M. Legendre a fait paraître encore un supplément à son *Essai sur la Théorie des Nombres*, seconde édition, février 1816.

Ce supplément est divisé en trois chapitres.

Le premier offre les moyens de décomposer un nombre donné en quatre quarrés, tels que la somme de leurs racines soit égale à un nombre donné compris entre certaines limites.

Ce problème sert d'introduction au chapitre suivant qui a

pour objet la démonstration générale du théorème de Fermat, sur les nombres polygones. Cette démonstration est fondée sur les mêmes principes que celle dont la découverte récente est due à M. Cauchy; elle en diffère cependant à quelques égards, et elle ne suppose démontré que le théorème relatif aux nombres triangulaires, qui est le premier cas du théorème général.

En rendant compte, l'année dernière, de la découverte faite par M. Cauchy, d'une démonstration inutilement cherchée jusqu'alors par tous les géomètres, nous avions exprimé quelques doutes sur la réalité ou la généralité de la démonstration que Fermat avait annoncée dans les termes les plus positifs, qu'il n'avait jamais donnée, et dont on n'a trouvé nul vestige dans ses papiers, quoique de sa nature cette démonstration dût être assez longue. Il nous paraissait donc tout-à-fait invraisemblable que Fermat n'eût jamais rien écrit sur une matière qui exigeait tant et de si longs développemens, et nous avions soupçonné que Fermat, après avoir plus mûrement examiné sa démonstration, en avait été lui-même peu satisfait, et s'était déterminé à la supprimer entièrement.

M. Legendre au contraire paraît ne douter nullement que Fermat n'ait été réellement en possession de la démonstration générale de son théorème. Il se borne à penser que cette démonstration était totalement différente de celle qu'il vient d'exposer. Fermat ne connaissait que deux cas tout au plus de la forme trinaire des nombres, sans quoi il n'eût pas restreint à la forme ($8n-1$) une propriété qui s'étend généralement à tous les nombres impairs; enfin, Fermat n'a point aperçu *une chose qui donne à son théorème plus de précision et d'élégance, savoir que sur les* ($m+2$) *polygones de l'ordre* ($m+2$) *qui composent un nombre donné, il y en a toujours* ($m-2$) *qu'on peut supposer égaux à* 0 *ou à l'unité*. Cette condition ajoutée par M. Cauchy, prouverait déja que Fermat n'avait pas lui-même une idée assez

précise de son théorème; mais M. Legendre va plus loin encore; il démontre que, *passé une certaine limite facile à assigner pour chaque ordre de polygones, tout nombre donné peut être décomposé en quatre polygones ou cinq au plus.*

Ces deux limitations apportées au théorème de Fermat, nous paraissent assez importantes pour qu'on puisse dire que depuis qu'il est démontré, ce théorème n'est plus tout-à-fait le même, et que sans cesser d'être vrai selon l'énoncé plus général de l'auteur, il a reçu des modifications utiles à connaître.

Le chapitre III de ce supplément contient des méthodes nouvelles pour la résolution approchée des équations numériques.

L'une de ces méthodes exige uniquement que l'on connaisse une limite supérieure à la plus grande des racines, et cette limite se trouve par une formule extrêmement simple.

L'auteur appelle fonction *omale*, c'est-à-dire *unie* et *sans irrégularité*, toute fonction de x qui jouit de la propriété d'être toujours croissante ou décroissante, à mesure que x augmente dans le sens positif depuis x égal à zéro jusqu'à x infini.

Il détermine ensuite la plus grande des racines, et divisant l'équation par cette racine, il l'abaisse d'un degré, et cherche de nouveau la plus grande racine de l'équation ainsi préparée. Ici la limite est connue, puisque la seconde racine est nécessairement moindre que la première. Le même procédé donnera successivement toutes les racines dans l'ordre de leurs grandeurs toujours décroissantes.

La seconde méthode consiste à partager l'équation proposée en deux fonctions omales simples. On construit les courbes de ces deux équations, et les diverses intersections de ces courbes font connaître les racines positives qu'on peut déterminer.

L'auteur, enfin, s'occupe de la recherche beaucoup plus difficile des racines imaginaires, mais l'on sent que cette dernière partie est bien moins susceptible d'extrait que les précédentes.

Il termine en annonçant aux amateurs de la théorie des nombres, deux ouvrages importans, et d'un usage presque indispensable dans les recherches de ce genre. Le premier est le *Cribrum Arithmeticum* de M. Chernac, professeur de philosophie à Deventer, dans lequel on trouve tous les nombres premiers et les diviseurs des autres nombres, depuis un jusqu'à un million et plus. Cet ouvrage a déja prouvé que la règle de M. Legendre, pour trouver en quelle quantité les nombres premiers se trouvent entre deux limites données, est une approximation singulièrement exacte.

L'autre est celui de M. Burckhardt, qui, pour étendre cette table beaucoup plus loin, a créé une méthode sûre et facile qui lui a fourni en peu de temps le moindre diviseur de tout nombre compris dans les deux millions qui suivent. Avant d'aller plus loin, M. Burckhardt a cru devoir donner le premier million dans la même forme que le second et le troisième. Cette première partie vient de paraître sous ce titre :

Table des diviseurs pour tous les nombres du premier million, ou plus exactement depuis 1 *jusqu'à* 1020000, *avec les nombres premiers qui s'y trouvent, par* J. Ch. Burckhardt. *Paris, madame veuve Courcier,* 1817.

La préface annonce la comparaison du million de M. Chernac avec un manuscrit de M. Schenmark, que possède l'Institut, et elle offre le relevé des fautes d'impression que cette comparaison a fait découvrir dans le *Cribrum* de M. Chernac. Personne ne s'étonnera que quelques erreurs typographiques se soient glissées dans un pareil ouvrage, et M. Burckhardt lui-même nous invite à annoncer qu'une faute de ce genre lui est échappée à la page 2, dans l'exemple qu'il donne de l'usage de la table. Il choisit le nombre 784241 dont il s'agit de trouver le plus petit

diviseur 53; on a laissé par mégarde 764241; mais l'erreur est aisée à remarquer, et ne trompera personne, car à la page 88, qui est exactement indiquée, on aperçoit au premier coup-d'œil que le nombre doit commencer par 78 et non par 76. Au reste, tous ceux qui ont eu à s'occuper du travail ingrat et pénible de la publication des tables, soit astronomiques, soit arithmétiques, ont appris, par leur expérience, que les fautes qu'ils y ont laissées se rencontrent rarement dans les endroits plus difficiles qu'ils ont revus avec l'attention la plus sévère, mais qu'elles sont plus ordinairement à la place où il était plus aisé de les éviter, de manière qu'elles frappent tout aussitôt les yeux du lecteur moins préoccupé, qui même ne les cherche pas.

M. Burckhardt expose ensuite les moyens qu'il a imaginés pour étendre l'usage de ses tables des diviseurs; il termine en avertissant que, si la vente des trois premiers millions donnait quelque espérance de placer de même les suivans, il reste peu de travail pour compléter les 4e, 5e et 6e millions.

Dénonçons encore aux calculateurs une faute d'impression; elle se trouve dans des tables qu'on est dans la coutume d'employer avec confiance, celles de Schulze et de Véga. *Le log. hyperbolique de* 7853 *est* 8.968.... *au lieu de* 8.967. En effet le le logarithme de 7853 commence dans les deux tables par les figures 8.967, et il est évident que le 7 est trop faible; un calcul facile prouve qu'en effet il faut lire 8.968. Nouvelle preuve de ce que nous disions tout-à-l'heure, que les erreurs restent toujours aux endroits où il était plus aisé de les apercevoir, et sur lesquels l'œil fatigué du reviseur ne se porte qu'avec une sorte de distraction.

URANUS.

On se rappelle la surprise des astronomes, en 1781, à la nouvelle qu'une planète jusqu'alors inconnue venait d'être découverte par M. Herschel; les soins qu'ils se donnèrent pour ob-

server assiduement cette petite planète, et leurs efforts pour dresser des tables qui en pussent représenter la marche apparente. A peine ces tables étaient-elles ébauchées, que les astronomes trouvèrent des ressources inattendues. Il parut singulier qu'une planète qui, dans les lunettes ordinaires, ne se distingue des étoiles de cinquième grandeur que par une lumière un peu plus terne, eût échappé aux yeux des auteurs qui ont donné des catalogues nombreux des étoiles même beaucoup plus faibles que la planète. M. Bode eut l'idée heureuse de la chercher dans les catalogues de Flamsteed et de Mayer, et de s'assurer que deux fois déja la planète avait été observée, mais comme une étoile ordinaire. La même recherche dans les observations de Lacaille n'eut pas le même succès, ce qui tient à ce que cet astronome faisait d'avance la liste des étoiles dont il voulait vérifier les positions, et qu'il prenait dans les anciens catalogues. D'ailleurs on sait que la mort vint le frapper avant qu'il eût achevé son catalogue des étoiles zodiacales, qui n'a paru que quelques années plus tard. Outre ces deux observations de 1690 et de 1755, Lemonnier en publia trois autres, l'une de 1764, et les deux autres de 1768. Ces dernières auraient suffi pour lui assurer l'honneur de la découverte, s'il eût pris la peine de les comparer entre elles; car elles se trouvaient dans les circonstances les plus favorables. Avec ces secours, et en y joignant une suite d'observations d'élite faites dans un intervalle de huit ans postérieurement à la découverte, on fit des tables dans lesquelles entrèrent les perturbations produites par Jupiter et Saturne; et ces tables, qui depuis vingt-cinq ans sont entre les mains de tous les astronomes, représentaient les mouvemens d'Uranus avec un précision dont on n'eût osé espérer qu'elles fussent susceptibles, et bien supérieure à celle qu'on avait pu donner jusqu'à cette époque à la théorie des planètes connues de tout temps. Mais il était tout-à-fait hors de vraisemblance

que cette exactitude pût durer bien long-temps encore, et l'on attendait patiemment que la suite des ans amenât un nombre d'observations suffisant pour confirmer ou rectifier une théorie qui n'était pas encore assez éprouvée. Le Journal de M. Lindenau nous apprit que M. Bessel avait trouvé dans le Recueil de Bradley une observation plus ancienne encore que celle de Mayer : le Journal n'en disait pas davantage. M. de Lindenau, à notre prière, demanda à M. Bessel les renseignemens que nous desirions. Une lettre de M. Bessel vient de nous apprendre que cette observation est du 3 déc. 1753, mais qu'elle est incomplète en ce qu'elle n'a été faite qu'à l'instrument des passages. Le temps sidéral du passage est 22ʰ. 23'. 21".828; ainsi le 3 déc. à 5ʰ. 32'. 34". 8 T. M. l'ascension droite était :

	333° 50'. 27".4	la déclin. 10.55'.. A
Nos tables donnent	50 . 39 .9	.... 10.53.32".9

Ainsi l'erreur des tables n'est que de 12".5.

M. Bessel a de même calculé de nouveau l'observation de Mayer, et le 25 septembre 1756 à 10ʰ. 51'. 52".8 T. M., il a trouvé

ascension droite..	348. o. 52".9	décl. 6°. 1'.49".1 A
suivant nos tables	348. 1. 4 .5.....	6 .1 .35 .4
excès de calcul...	+ 11 .6	— 12 .7

Ces deux observations précieuses, en conclut M. Bessel, *sont donc parfaitement d'accord.* Long-temps avant que nous eussions reçu cette réponse, sans même savoir que nous l'eussions demandée, M. Burckhardt s'était mis à chercher l'observation, qu'il avait facilement reconnue; il l'avait aussi calculée pour la comparer aux tables, et il avait lu ses résultats dans une de nos séances. C'était à l'aide du catalogue de Flamsteed que M. Bode avait trouvé l'observation de 1690. Depuis cette époque, miss

Caroline Herschel avait fait imprimer un catalogue complet de toutes les étoiles que Flamsteed avait observées, et qu'il n'avait pas fait entrer dans son catalogue. C'était une mine nouvelle à exploiter, et M. Burckhardt y a fait la découverte de cinq observations également importantes; il les a calculées avec tout le soin possible, en employant même les mouvemens des étoiles tels qu'on a pu les déterminer. De cette manière il a déduit l'opposition d'Uranus, en 1715, quinze ans après la première observation, et quarante-un ans avant celle de Mayer. Il a donc obtenu les résultats suivants :

4 mars, asc. dr. 170°. 40'. 18".0 décl. 4°.54'. 22".7
10 mars........ 170 . 25 . 45 .0 .... 5 . 0 . 38 .6

Le résultat moyen est une erreur des tables de + 65".7 en longitude, et + 1".2 en latitude. Outre les trois observations employées ci-dessus, M. Burckhardt en a encore trouvé deux autres : la première est du 2 avril 1712, et l'autre du 29 avril 1715. les trois observations de Lemonnier sont, l'une du 15 janvier 1764, les deux autres des 27 et 30 décembre 1768.

L'opposition de 1799 comparée à celle de Flamsteed donne 60".9 de plus que les tables pour le mouvement en quatre-vingt-quatre ans; car après une révolution entière, l'erreur de l'aphélie et celle de l'excentricité se trouvent les mêmes; il faudrait donc ajouter 0".725 au mouvement annuel, qui serait 4°. 17'. 55".520. Ce résultat est d'autant plus important, qu'il n'avait pas été possible jusqu'ici de séparer les deux indéterminées.

M. Burckhardt remarque en outre que les observations de 1715 et 1753 sont très-bien situées pour déterminer le lieu de l'aphélie; celles de 1690 et 1781 sont très-propres à rectifier l'équation du centre.

Les observations de 1690, 1715 et 1753, ont donné pour les tables les corrections suivantes:

Epoques de 1799,

+ 34″.1 aphélie + 6′. 41″ équat. — 55″.3

Les observations de 1715, 1753 et 1781 ont donné

+ 27 .5 + 6 . 25 + 3 .6

Six minutes de changement dans l'aphélie peuvent en certains cas changer la longitude de 36″.

Quant à l'observation de Flamsteed, en 1690, qui était entrée dans la composition des tables, les Nouveaux Elémens ne la représentent qu'à 1′ près; malheureusement elle est isolée, et il suffirait de lire dans le passage 44″ au lieu de 49″ pour tout accorder. Mais les manuscrits de Flamsteed se conservent à l'Observatoire de Greenwich, il sera donc facile de s'assurer si la conjecture de M. Burckhardt est fondée.

M. Burckhardt donne ensuite un moyen facile pour comparer les nouveaux élémens à toutes les observations qu'on voudra calculer, c'est d'ajouter aux longitudes moyennes des tables 0″.725 *t*, *t* étant le nombre d'années écoulées depuis 1761; d'ajouter 6′. 26″ à l'aphélie, et de supposer que les tables de l'équation et du rayon vecteur sont pour l'année 1813.

Les étoiles que Flamsteed a observées en même temps qu'Uranus sont *d* du Lion et *b* de la Vierge.

COMÈTES DE 1783 ET 1793.

La première de ces comètes fut découverte par M. Méchain, le 26 novembre, et observée par lui, ainsi que par M. Messier, jusqu'au 21 décembre. M. Pigot l'avait vue en Angleterre, dès le 20 novembre, et n'avait pu la suivre que jusqu'au 3 décembre. Il n'avait même fait qu'estimer les déclinaisons, de sorte que l'incertitude à cet égard peut aller à deux minutes.

Méchain, le président Saron et le chevalier d'Angos n'avaient pu trouver de parabole qui satisfît aux observations mieux qu'à 5 ou 6′ dans un temps où le mouvement diurne n'était guères que de 4′ ½. Des erreurs aussi considérables dans un arc de 25 jours indiquaient une orbite différente de la parabole, car il est prouvé que les observations de Messier étaient parfaitement d'accord avec celles de Méchain.

Après avoir inutilement essayé les paraboles, M. Burckhardt a cherché une ellipse, et il a trouvé les élémens que voici :

Demi-grand axe 3.15854; révolution sidérale, 5 années, 7 mois ½, ou 2050ʲ.4.

Excentricité 0.5395345; distance périhélie 1,4544.

Passage par le périhélie 1783 19ʲ,50013 novembre, temps astronomique.

Lieu du périhélie, 50°. 3′. 8″. nœud ascendant 55°. 45′. 20″.

Inclinaison, 44°. 53′. 24″. mouvement direct.

Avec cette ellipse, les erreurs vont à peine à une minute et demie.

La comparaison de cette ellipse aux orbites connues porte à croire que la comète de 1783 pourrait être la même que celle de 1793; il fallait donc examiner si l'ellipse ci-dessus pouvait convenir à cette dernière comète.

Dans le cas où les deux ellipses seraient un peu différentes, il conviendrait encore d'examiner les effets de l'attraction de Jupiter, dont la comète a dû s'approcher beaucoup vers son aphélie. M. Burckhardt n'a pas encore eu le loisir de se livrer à ce travail, mais en attendant, et pour prendre date, il donne les erreurs des lieux de la comète calculées dans une ellipse de 5 ans et dans une ellipse de 10 ans, dont voici les élémens.

Passage au périhélie, 1783, nov. 19ʲ. 56868; nœud, 65°. 12′; inclinaison, 47°. 43′.

Périhélie, 49°. 31′ 55″; excentricité, 0.6784; distance périhélie, 1.49532.

Log. ½ grand axe, 0.6674185; log. $\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}}$ 9.6412103; log. paramètre 0.3996300.

Demi-grand axe, 4.64963.

Les deux ellipses vont à-peu-près bien; de légers changemens pourraient diminuer encore les erreurs de longitude, mais les erreurs de latitude sont plus fortes dans l'ellipse de dix ans. Au reste, la différence n'est pas telle qu'il ne reste beaucoup d'incertitude sur le grand axe; ainsi on n'a nul espoir de déterminer sûrement les perturbations.

La comète de 1793 présente des incertitudes beaucoup plus fâcheuses. D'abord cette comète était très-faible, ce fut le hasard qui la fit découvrir à M. Perny, qui ne la cherchait pas. M. Messier ne put d'abord la voir avec sa lunette de nuit, il fut obligé d'y employer sa grande lunette achromatique. Cette circonstance suffirait pour expliquer comment il s'est fait que la comète n'ait pas été vue depuis, si en effet elle revient tous les dix ans ou tous les cinq ans.

L'intervalle que comprennent les observations est de 75 jours; il n'était que de 55 en 1783.

Vers le même temps, M. Messier avait lui-même découvert une autre comète, qui l'intéressait davantage, et à laquelle il employait exclusivement sa meilleure lunette. Il n'avait, pour observer la comète de M. de Perny, qu'un instrument dont le micromètre était très-défectueux, et ne donnait les déclinaisons qu'à deux minutes près, ainsi qu'on l'a reconnu depuis. M. Perny avait une meilleure lunette et un micromètre plus exact, mais il paraît avoir un peu trop négligé de profiter de ces avantages pour multiplier les observations; il sera donc bien difficile de prononcer sur l'orbite véritable. Les astronomes qui étaient alors

à Paris, n'ayant pas le loisir de calculer ces observations, le président Saron, qui était en prison, voulut bien se charger de ce soin, et Lalande lui faisait passer exactement les données nécessaires au calcul. La parabole, déterminée par Saron, fut le dernier travail de ce respectable et infortuné magistrat. Dans une note qui subsiste encore, il témoignait sa surprise de ce qu'il lui était impossible de représenter les longitudes observées mieux qu'à 16 ou 17′, et les latitudes mieux qu'à deux ou quatre minutes; mais il est juste de remarquer que la comète était tout près du pôle de l'écliptique, et que ces erreurs réduites au parallèle de la comète deviennent beaucoup moins considérables; au reste il suffit des erreurs en latitude pour s'assurer que l'orbite ne pouvait être parabolique.

En supposant l'orbite entièrement inconnue, M. Burckhardt a trouvé une ellipse dont voici les élémens :

Passage, 1793 nov. 28^j.60631, lieu du périhélie, 75°. 58′. 58″.
Inclinaison, 47°. 35′. 5″, nœud, 359. 4′. 48″.
Log. demi-grand axe, 0.7225030, log. paramètre, 0.3853764.
Log. dist. périhélie, 0.1461360, excentricité, 0.7347635.
Révolution, douze ans et demi à-peu-près.

Cette ellipse ne représente la dernière longitude qu'à 47′ ½ près, et les latitudes à 1 ½.

En supposant connu le demi-grand axe et la révolution de dix ans, on aurait,

Excentricité, 0.701355; distance périhélie, 1.38859; périhélie, 75°.49′; inclinaison, 46°. 55. Cette ellipse ne représente pas mieux l'observation du 8 décembre.

La conclusion de M. Burckhardt est qu'avec des observations si peu sûres, et dans de pareilles circonstances, il est impossible de prononcer sur l'identité de deux comètes, quelque vraisemblable qu'elle ait paru d'abord. Si les deux comètes n'en font qu'une, il faudra supposer un mouvement considérable tant au

nœud qu'au périhélie de l'orbite. Les observations futures pourront seules décider la question, mais il y a bien des chances pour qu'une comète si faible revienne bien des fois à son périhélie sans être aperçue.

Mémoire sur les Mesures agraires des anciens Égyptiens, par M. GIRARD.

On sait que les inondations du Nil, en confondant les bornes des héritages, ont obligé les Égyptiens à cultiver la géométrie; on dit même qu'ils ont été les premiers précepteurs des Grecs; il est vrai que l'on raconte aussi que Thalès apprit aux prêtres d'Égypte à déterminer la hauteur des pyramides par la longueur de leurs ombres; et dans ce cas, la science géométrique des Égyptiens se bornait probablement à quelques pratiques grossières d'arpentage. Voyons si le nouveau Mémoire pourra jeter quelque lumière sur une question se difficile.

« Ce qu'on pratique aujourd'hui en Égypte est la représentation « fidèle de ce qu'on y a pratiqué dès les premiers temps de la « civilisation. » Ainsi les pratiques actuelles vont nous donner la mesure des connaissances que l'on peut accorder aux prêtres de cette contrée. « On conçoit que dans le mesurage des terres on « aurait perdu beaucoup de temps si l'on avait mesuré l'*aroure*, « (c'était un carré dont le côté avait pour longueur cent coudées « d'Égypte, et dont la superficie était l'espace que deux bœufs « pouvaient labourer en un jour), en appliquant successivement « le long de cette ligne une coudée simple; on remplaça la coudée « par un de ses multiples... L'arpenteur tenant d'une main un « long roseau, se place à l'extrémité de la ligne qu'il doit mesurer... « Il trace avec ce roseau un léger sillon transversal, pour indiquer « le point où cette extrémité répond; il y soutient le plus près « possible du sol l'extrémité postérieure du roseau, et trace de

« l'extrémité opposée un second sillon transversal; il reporte le « bout postérieur de la canne sur ce second sillon, et ainsi de « suite jusqu'à ce qu'il ait parcouru toute la ligne... On voit que « ce procédé de mesure est de la plus grande simplicité, et n'exige « guère plus de temps qu'il n'en faudrait pour parcourir au pas « l'intervalle qu'on doit mesurer; mais il est visible qu'il n'est pas « rigoureusement exact.

« Puisque l'unité de mesure agraire était un carré de cent « coudées de côté, il est évident que la longueur de la canne « d'arpentage dût être primitivement l'un des facteurs de ce « nombre. Un roseau de cinq coudées satisfaisait aux conditions « essentielles. L'unité de mesure agraire de 10000 coudées « carrées fut ainsi transformée en une autre de 400 cannes « carrées.

« Rendre les opérations de l'arpentage plus expéditives... c'était « résoudre un problème de la plus haute importance. Les prêtres « trouvèrent une nouvelle canne aussi facile à employer, et qui « l'emportait sur la première par l'avantage qu'elle procurait « d'abréger beaucoup, sans altérer sensiblement la valeur de la « mesure agraire primitive. »

Tels sont les faits rapportés par l'auteur; voici ses conjectures.

En construisant sur la diagonale d'un carré un carré nouveau, on vit qu'en prolongeant les côtés du carré primitif on avait les diagonales du second, et que le second était exactement double du premier. Il fut aisé d'en conclure qu'en prenant pour canne une aliquote de la diagonale, on obtiendrait, sans augmenter beaucoup le travail, une aroure double de la première. On vit aisément que la diagonale contenait plus de 28 cannes et moins de 29, plus de 141 coudées et moins de 142; on s'arrêta à 28 cannes: l'erreur n'était que de 16 cannes superficielles sur 800, c'est-à-dire un cinquantième, et cette erreur était favorable au gouvernement, parce qu'elle augmentait l'impôt. Le nombre 28 a pour diviseur

le nombre 7; on donna donc sept coudées au roseau, toujours dans la vue d'abréger.

Il est vrai qu'on ne trouve dans l'antiquité aucun témoignage positif sur l'emploi de la canne de 7 coudées, mais on peut remplacer ces preuves positives par des rapprochemens qui auront à-peu-près la même certitude.

L'auteur a rapporté dans son Mémoire sur le nilomètre d'Eléphantine, plusieurs observations qui démontrent que les constructeurs de la grande pyramide ont eu l'intention de donner aux différentes parties de ce monument un nombre rond de mesures linéaires; il est naturel de penser que la base de cette pyramide devait contenir un nombre rond de mesures superficielles. D'après les dernières mesures, la surface de la base est de 54135 mètres, ce qui fait juste dix de ces aroures septennaires, et donne pour la coudée o.^{m}525, précisément telle qu'elle se déduit des dimensions de la chambre sépulcrale, et la même encore qui se conclut du nilomètre d'Eléphantine.

Nous conviendrons bien volontiers de l'exactitude singulière de ces rapports; mais, en adoptant l'hypothèse toute entière, il en résulterait tout au plus que les prêtres d'Egypte connaissaient le cas le plus simple du fameux théorème du carré de l'hypoténuse, ce qui n'indiquerait pas une science bien perfectionnée.

Les sections II et III du Mémoire traitent des mesures agraires de l'Egypte sous les Perses et sous les Romains. On y voit que le *jugère* de Héron n'est autre chose que le *jugère* romain; on y voit prouvé par un passage curieux de Didyme d'Alexandrie, que le pied italique était le même que le pied romain. Toutes les modifications introduites dans les mesures agraires s'expliquent par ce principe, qui a toujours réglé la conduite des vainqueurs; augmenter la somme des impositions, en ménageant, autant qu'il était possible, les habitudes du peuple conquis. Enfin, d'après des calculs qu'il nous est impossible d'extraire, il ne se

trouverait que $\frac{1}{151}$ de différence entre la véritable valeur de la base de la grande pyramide et l'évaluation que Pline en a donnée.

La section IV a pour objet de prouver que les Arabes n'introduisent aucun changement bien sensible, et le Mémoire est terminé par ce tableau qui en est le résumé.

I. *Aroure primitive.*		IV. *Socarion de Héron.*	
	m		m
Coudée primitive......	0.525	Coudée.............	0.527
Canne de 5 coudées....	2.625	Spithame royal.......	0.2035
Côté de 20 cannes.....	52.50	Orgye 9 $\frac{1}{4}$ spith.......	2.4351
Surface de 400 cannes..	2756.00	Côté de 10 orgyes.....	24.3510
Surf. de la double aroure	5512.00	Surface du socarion...	592.9710
		Surface décuple......	5929.7100
II. *Double Aroure de la G. Pyramide.*		V. *Feddan actuel des cultivateurs.*	
	m		m
Coudée..............	0.525	Pik beledy...........	0.5772
Canne de 7 coudées....	3.675	Canne de 6 $\frac{2}{3}$ Pik beledy	3.8500
Côté de 20 cannes.....	73.50	Côté de 20 cannes....	77.0000
Surface de 400 cannes..	5413.00	Surface de 400 cannes.	5929.00
III. *Double Jugère Romain.*		VI. *Feddan actuel de Qobtes.*	
	m		m
Coudée.............	0.527	Pik beledy..........	0.5775
Canne de 6 coudées $\frac{2}{3}$..	2.5133	Canne de 6 $\frac{1}{3}$ Pik bel..	3.658
Côté du double jugère.	70.20	Côté de 20 cannes....	73.16
Surface de 400 cannes.	4937.00	Surface de 400 cannes..	5353.00

Sur l'Élévation des montagnes de l'Inde, par M. ALEXANDRE DE HUMBOLDT.

« La mesure exacte des montagnes dont on ne peut atteindre « la cime, offre des difficultés qui tiennent en grande partie à « l'élévation des terrains dont leurs bases sont entourées; les

« plateaux sur lesquels s'élèvent les chaînes sont généralement « trop éloignés des côtes pour qu'on puisse en déterminer l'élé- « vation, soit par des angles de dépression, soit par un nivelle- « ment géométrique; il en résulte que chaque mesure d'une haute « montagne est presque toujours en partie barométrique, en « partie trigonométrique. »

Quand M. de Humboldt mesura la hauteur de Chimborazo, sur le plateau de Tapia, où il avait pris sa base, il était élevé de 2890 mètres au-dessus de la mer, et le sommet de la montagne ne s'élevait que de 6° 40' au dessus de cet horizon.

La distance à la montagne était de 30437 mètres. Plus près, dans les plaines de Sisgun, la base aurait eu une élévation de 3900 mètres, et la partie déterminée géométriquement n'eût été que de 2630. Ainsi les voyageurs se trouvent souvent réduits à indiquer seulement la hauteur des montagnes au-dessus des plateaux dont ils ignorent l'élévation absolue, ou à faire des mesures dans des plaines très-éloignées, d'où la hauteur n'est vue que sous un angle fort aigu, que les réfractions peuvent altérer sensiblement.

Ce sont ces obstacles qui nous ont privés long-temps de la connaissance exacte de la hauteur des montagnes de l'Inde. La partie orientale de l'Himalaya (séjour des neiges, c'est l'Imaüs des anciens) est visible des plaines du Bengale, à la distance de 150 milles anglais; sa hauteur au-dessus de ces plaines n'est donc pas moindre que de 2020 toises. Un pic très-élevé de l'Himalaya, que l'on distingue de la ville de Patna, fut estimé par le colonel Crawford, 20000 pieds anglais au-dessus des plaines de Népaul, qu'il supposait élevées de 5000 p. au-dessus du niveau de l'océan. Quoique ces élévations soient simplement approximatives, on a pu en conclure que les montagnes de l'Inde atteignent ou surpassent en élévation les Cordillères de Quito.

M. Elphinstone nous apprend que le lieutenant Macartney a trouvé plusieurs cimes de l'Hindou-Coosh (Montagne-Noire, en persan) élevées de 20493 pieds anglais. Au-dessus de quelle vallée cette évaluation a-t-elle été faite? Si c'est au-dessus des plaines de Peshawer, on pourrait croire qu'il ne reste pas beaucoup à ajouter à la hauteur mesurée par M. Macartney. L'angle de hauteur n'était que de 1° 30'; la distance était de 100 milles. L'auteur lui-même n'ose mettre beaucoup de confiance au résultat de pareilles données.

M. Webb, lieutenant au corps d'infanterie du Bengale, à qui nous devons la connaissance plus exacte du cours du Gange, a été chargé de lever la carte du Kmaon et de la province de Népaul. Il a observé les hauteurs de vingt-sept pics couverts de neiges perpétuelles. Vingt de ces pics excèdent 20000 pieds anglais. Le plus bas est de 15733 pieds; le plus élevé a 25669 pieds anglais, ou 412 toises. M. Webb ajoute que ce dernier est d'un mille plus élevé que le Chimborazo, qu'il ne suppose apparemment que de 3014 toises. Voici les hauteurs des quatre pics les plus élevés de l'Himalaya.

14ᵉ pic.	25669 pieds.	4013 toises.	7821 mètres.
12ᵉ....	23263......	3637	7088
3ᵉ....	22840......	3571	6959
23ᵉ....	22727......	3553	6925

Chimborazo, d'après M. de Humboldt. 6530.

Le douzième volume des Recherches Asiatiques nous donnera à cet égard des renseignemens précieux. Déja, par un extrait qu'on trouve dans le *Journal of Sciences and Arts*, nous apprenons que le pic de Chamalasi est vu de différentes parties du Bengale, à 232 milles de distance, ce qui indique, en admettant une réfraction moyenne, une hauteur de 28000 pieds anglais. Un autre pic de l'Himalaya paraît au Bengale, sous un angle de 1° 1' à

une distance qui, d'après les cartes du major Rennel, ne peut être moindre que de 150 milles. Sa hauteur est par conséquent au moins de 26000 pieds. Le lieutenant-colonel Colebrooke a pris dans deux stations des angles de hauteur d'une cime qui, en supposant $\frac{1}{5}$ de réfraction, a 22.291 pieds sur les plaines du Rohilkhand, et à-peu-près 22800 pieds au-dessus du niveau de l'Océan. Selon quelques observations du major Lambton, la réfraction terrestre dans le climat de l'Inde est de $\frac{1}{8}$; elle varie de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{18}$.

D'après les mesures du colonel Crawford, le mont Dhaibun a 20.140 pieds de hauteur au-dessus de Cathmandu, qui est élevé de 4500 pieds au-dessus de l'Océan. D'autres pics ont 17.819, 20.025, 18.662 pieds. Le plus proche est à 170 milles de distance, le plus éloigné à 226 milles. Le Dhawalagir (Montagne Blanche de l'Himalaya), relevé de quatre points différens, et en prenant trois angles de hauteur, fut trouvé de 26784 pieds, et de 27551 pieds, selon que l'on compte $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{11}$ de réfraction. Le président de la société de Calcutta trouve que, en supposant les erreurs de l'observation et de la réfraction au *maximum*, et également en excès, ce pic est encore élevé de 26462 pieds au-dessus des plaines de Gorakhpur, et de 26862 au-dessus de l'Océan.

L'Yamunavatari ou Jamautri est de 20.895 pieds au-dessus de Nagunghari, qui a 5000 p. au-dessus de l'Océan; total, 25500 p. Une montagne, que l'on suppose être le Dhaibun, s'élève au-dessus du niveau de la mer, de 24740 pieds.

Un autre pic, visible à Pilibhit et Jethpur a 22768 p. au-dessus du niveau de la mer; un autre vu à Cathmandu, dans la direction de Calabhairavi, a 24625 pieds. La vallée de Népaul même, dans laquelle plusieurs bases ont été mesurées, a 4600 pieds de hauteur absolue.

La plus haute cime de l'Himalaya qui, d'après les calculs de

M. Webb, n'aurait que 4013 toises, ou 7821 mètres, aurait 4201 toises, ou 8187 mètres, d'après le calcul du président.

Il n'est pas exact de juger de la hauteur d'une chaîne de montagnes uniquement d'après la hauteur des cimes les plus élevées. Un pic de l'Himalaya excède le Chimborazo de 1300 mètres, le Chimborazo excède le Mont-Blanc de 1700 mètres, le Mont-Blanc excède le Mont-Perdu de 1300 mètres. Ces différences ne donnent pas les rapports de la hauteur moyenne des chaînes mêmes, c'est-à-dire la hauteur du dos des montagnes sur lequel s'élèvent les pics, les aiguilles, les pyramides, et les dômes arrondis. La partie du dos qui forme les passages des Andes, des Alpes et des Pyrénées, nous fournit une mesure très-exacte du *minimum* de hauteur qu'atteignent les chaînes de montagnes. En comparant ses mesures à celles de Saussure et de M. Ramond, l'auteur évalue la hauteur moyenne du dos des Andes au Pérou, à Quito, et dans la Nouvelle Grenade, à 3600 mètres, le dos des Alpes et des Pyrénées s'élève à 2300 m. La différence moyenne des Alpes et des Cordillères est par conséquent de 500 mètres plus petite qu'on ne l'aurait cru d'après la hauteur des pics. Il serait intéressant de connaître la hauteur moyenne de la chaîne de l'Himalaya entre les méridiens de Patna et de Lahore.

Les neiges perpétuelles ne commencent, près de l'équateur, dans les Andes, qu'à 4800 mètres d'élévation; elles descendent vraisemblablement dans l'Himalaya par les 30° de latitude, jusqu'à 3700 mètres; la végétation se développe donc, dans le Nouveau-Monde, sur une plus grande étendue que dans les Cordillères de l'Inde. Comme sous la zone tempérée les neiges durcissent par l'effet du froid de l'hiver, tandis qu'elles restent molles dans les Andes de Quito, on pourra vraisemblablement traverser les neiges de l'Himalaya, sans être obligé, comme l'ont été MM. de Humboldt et Bonpland, de suivre les arêtes étroites

des rochers qui se présentent de loin, comme des stries noires au milieu des neiges éternelles. Mais ces excursions pénibles, dont les récits excitent l'intérêt du public, n'offrent qu'un petit nombre de résultats utiles aux progrès des sciences, le voyageur se trouvant sur un sol couvert de glace, entouré d'une couche d'air dont le mélange chimique est le même que celui des plaines, et dans une situation où des expériences délicates ne peuvent se faire avec toute la précision requise. (*Voyez* les Annales de chimie et de Physique, novembre 1816.)

Ce même cahier contient le Mémoire sur la vitesse du Son, par M. Laplace, dont nous n'avons pu rapporter ci-dessus que le titre; on y voit le théorême suivant :

« La vitesse réelle du son est égale au produit de la vitesse « que donne la formule newtonnienne par la racine quarrée du « rapport de la chaleur spécifique de l'air soumis à la pression « constante de l'atmosphère, et à diverses températures, à sa « chaleur spécifique, lorsque son volume reste constant. »

D'après cette règle, M. Laplace trouve 345.^{m} 35 pour la vitesse du son dans une seconde sexagésimale à la température de 6°. Les académiciens français l'ont observée de 337.^{m} 18. Par des expériences de Lacaille rapportées au tome III de la Base de systême métrique décimal, page 342, on aurait 344,42. Nous ignorons quelle était la température au temps de ces observations, qui sont du mois d'octobre, dans les environs de Marseille.

En parlant des expériences de Canton, M. Laplace a trouvé les vitesses du son dans l'eau de pluie et dans l'eau de mer égales à 1525.^{m}8 et 1620.^{m}9. En sorte que la vitesse du son dans l'eau douce est quatre fois et demie plus grande que dans l'air.

Traité de Physique expérimentale et mathématique, par M. Biot*, quatre volumes* in-8° *formant plus de* 2450 *p. Paris, Déterville,* 1816.

Dans son épitre dédicatoire à M. Berthollet, l'auteur trace le tableau de l'état actuel de la physique. « Toutes les personnes qui « ont eu l'occasion de faire des recherches un peu variées ont « dû reconnaître avec regret combien les matériaux de cette belle « science sont encore épars, et combien sa marche générale est « encore incertaine. Tel résultat est admis dans un pays, et tel « dans un autre. Ici une évaluation numérique est employée « habituellement; là on la regarde comme douteuse ou comme « inexacte. Les principes généraux même sont loin d'être uni« versellement adoptés. » L'auteur en donne, pour exemple, les trois systèmes tout-à-fait différens sur l'électricité, les opinions diverses qu'on a manifestées sur la théorie newtonienne des accès de facile transmission de la lumière. « De-là vient que, « n'étant pas d'accord sur les principes de la science, on est dans « le cas de gens qui se parleraient en des langues diverses qu'ils « n'entendraient pas mutuellement; les bonnes méthodes ne se « propagent point; les considérations les plus fécondes restent « long-temps inconnues, et par conséquent stériles; quelques « parties de la science s'avancent par fois rapidement dans un « pays, et restent immobiles dans d'autres, ou y prennent une « mauvaise marche. Ce n'est pas assurément qu'il manque de « gens habiles pour cultiver la physique... aussi dans ce court « intervalle (de quarante ans) que de résultats importans sûre« ment constatés, que de faits nouveaux découverts! » Ici vient une énumération longue, quoique concise, des travaux de Coulomb, de Galvani, de Volta, de Malus, et de plusieurs autres physiciens modernes. « Ce coup-d'œil, rapidement jeté sur la « science, nous découvre l'immensité de ses richesses. Ce qui lui

« manque, c'est l'ensemble; c'est une jonction de parties qui en « fasse un seul corps; c'est une fixité de données et de prin- « cipes qui imprime à tous les efforts une même direction. Voilà « ce que j'ai tâché de faire. L'entreprise était difficile; on jugera « si j'y ai réussi. »

Alors l'auteur entre dans le détail des secours précieux qui lui ont été prodigués; et il expose le plan qu'il a cru devoir suivre dans son travail. « Beaucoup de personnes croyent que la phy- « sique doit être présentée sous une forme purement expéri- « mentale, sans aucun appareil algébrique. On a dit que la pré- « cision dont nous croyons ainsi approcher est purement idéale, « parce qu'elle dépasse infiniment les limites des erreurs aux- « quelles les expériences sont inévitablement sujettes... Mais quand « on a observé avec précision les différens modes d'un même « phénomène, et qu'on en a obtenu les mesures numériques, « quel inconvénient y a-t-il à les lier par une formule qui les em- « brasse tous? S'ils sont réductibles à quelque loi simple, mais « qui pourtant ne s'aperçoive pas du premier coup d'œil, n'est- « ce pas là l'unique voie pour la découvrir?.. Pour sentir combien « cette méthode est sûre, et jusqu'où elle peut conduire, il n'y a « qu'à voir l'usage que Newton en a fait dans ses recherches sur « les propriétés les plus subtiles de la lumière... Si le livre de « l'Optique où ses résultats se trouvent a été si peu compris, et « en général si mal apprécié, la faute n'en est pas à l'emploi des « formules algébriques, mais plutôt à ce qu'au lieu de formules, « Newton a employé une synthèse qui se prêtait mal à pénétrer « dans tant de détails.... On verra dans l'ouvrage, qu'à l'aide du « calcul analytique, tel qu'il est maintenant employé, je suis « parvenu à exprimer tous les principes de cette théorie, par « un petit nombre de formules simples, que l'on peut en dé- « duire, avec une facilité extrême, tous les cas résolus ou indiqués « par Newton; et même les étendre à beaucoup d'autres... Sous

« cette forme nouvelle, on verra combien la théorie des accès « acquiert de netteté, combien ces bases sont sûres, et avec quelle « fidélité elle suit, dans leurs plus minutieux détails, une foule « de phénomènes que Newton ne soupçonnait pas en l'établissant... « Cette marche, que j'ai tâché par-tout de suivre, est celle que « Newton nous a enseignée par ses ouvrages, et qui, après ce « grand homme, a été peut-être trop peu suivie.... C'est la « seule qui puisse conduire à résoudre cette question générale, « qui comprend toute la physique : *Les circonstances qui déter-* « *minent un phénomène étant définies, assigner exactement en* « *nombres toutes les particularités qui en résulteront.* »

Telle était aussi la question que se proposaient les anciens astronomes, et qui a depuis été si complétement résolue par l'astronomie moderne. Après une exposition si claire et si précise, il ne nous reste qu'à indiquer, le plus brièvement qu'il nous sera possible, les objets que l'auteur traite successivement dans les différentes parties de son ouvrage.

Il décrit d'abord les instrumens qui servent dans toutes les expériences, il cherche les lois de la condensation de l'air et des gaz, celle de leur dilatation par la chaleur et à toutes températures, celle de la dilatation des solides et des liquides, il traite des forces qui déterminent les divers états des corps, des vapeurs, et de leur mélange avec les gaz, de l'évaporation, de l'hygrométrie; des pesanteurs spécifiques des gaz, des liquides et des corps solides, enfin de l'élasticité.

Dans le livre II, qui est consacré à l'acoustique, on remarquera les expériences nouvelles de l'auteur en société avec M. Hamel.

Le livre III, qui parle de l'électricité, offre l'analyse des principales théories, celle de la pile de Volta, les découvertes de Coulomb, et les savans calculs de M. Poisson.

Le livre IV reproduit les expériences magnétiques de Coulomb, de MM. Gay-Lussac et de Humboldt, et les recherches des voya-

geurs sur les lois du magnétisme, dans les diverses parties du globe.

Le livre V, sur la lumière, est l'un des plus considérables de ce traité. On y trouvera la description et le calcul de l'héliostate de S'gravesand, singulièrement perfectionné par M. Charles; les moyens exacts et les formules nécessaires pour déterminer les lois de la réfraction dans les solides, les liquides et les substances aériformes; enfin une Théorie très-détaillée de la réfraction, soit ordinaire, soit extraordinaire; et la construction des micromètres à doubles images, qui n'avait jamais été exposée d'une manière si lumineuse et si complète.

Dans son Analyse de la Lumière, il rapporte, commente et éclaircit les Recherches de Newton; il donne les formules exactes de l'achromatisme, et décrit l'appareil dont il s'est servi dans les expériences qu'il a faites en commun avec M. Cauchoix. Nous invitons les physiciens à méditer les développemens qu'il donne à la Théorie des accès de facile transmission et de facile réflexion, « dont tous les phénomènes pourraient se représenter avec la « fidélité la plus parfaite, en attribuant aux molécules lumi- « neuses deux pôles, l'un attractif, l'autre répulsif, qu'elles pré- « senteraient alternativement aux surfaces des corps, en tournant « d'un mouvement uniforme autour de leur centre de gravité. « Les molécules lumineuses seraient alors dans le cas de deux « aimans qui s'approcheraient l'un de l'autre par leurs pôles « amis ou ennemis... Dans cette manière de voir, l'intervalle des « accès ne serait autre chose que le temps écoulé entre deux « retours consécutifs des molécules lumineuses à une même phase « de leur rotation, et les longueurs des accès seraient les espaces « décrits par la molécule entre les époques des deux phases « correspondantes. Il paraît que Newton a eu cette idée, mais il « ne l'a point développée, sans doute afin de ne pas mêler une « idée très-vraisemblable, mais seulement vraisemblable, à la

« certitude qu'il avait obtenue de l'existence des accès. Ayant « aujourd'hui plus de faits que n'en avait Newton, nous avons « dû la développer davantage, en la donnant toutefois pour ce « qu'elle est. »

La Polarisation de la lumière est la matière du livre VI. Il est inutile d'annoncer que l'auteur y a réuni et classé les découvertes de Malus, les siennes propres, et celles des savans tant étrangers que français, qui ont cultivé avec le plus de succès cette branche nouvelle de la physique.

Le livre VII traite du Calorique, soit rayonnant, soit latent. On y trouve les expériences de MM. Herschel, Wollaston, Ritter, Beckman, Bérard, Leslie, Rumford, et de la Roche; les expériences que l'auteur a faites avec M. de Candolle, les recherches analytiques de MM. Fourier et Poisson, et les travaux de MM. Lavoisier et Laplace.

Le dernier chapitre traite des machines à vapeurs. L'ouvrage est terminé par le Mémoire de MM. Pouillet et Biot, sur la diffraction de la lumière.

MÉMOIRES ET OUVRAGES

PRÉSENTÉS A L'ACADÉMIE PAR SES CORRESPONDANS, OU PAR LES SAVANS ÉTRANGERS.

M. Dupin, ingénieur-constructeur de la marine, correspondant de l'Académie, lui a soumis un Mémoire qui fait suite à ses *Développemens de Géométrie*, et qui en est une application à la *Théorie générale du Tracé des Routes*, ramenée à de simples considérations de *géométrie descriptive*. (Commissaires, MM. de Prony, et Girard, rapporteur.)

« Les grandes routes ouvertes, en ces derniers temps, à travers « les Alpes, ont fourni aux ingénieurs français l'occasion d'ac- « quérir une grande expérience, et cependant les plus habiles

« diffèrent encore entre eux sur une question fondamentale ;
« mais, quelle que soit l'hypothèse qui mérite la préférence, la
« géométrie pourra toujours s'en emparer, et ce ne sera jamais
« qu'en employant les moyens qu'elle fournit que l'on parviendra
« à donner au tracé des routes le degré de perfection dont cette
« opération est susceptible.

« Les différens ouvrages que M. Dupin a présentés à l'Aca-
« démie, ont prouvé depuis long-temps qu'il réunissait les con-
« naissances et les talens nécessaires pour s'aider avantageusement
« de la théorie et de l'observation dans les travaux qu'il entre-
« prend. »

Les commissaires pensent que son nouveau Mémoire est une application utile de la géométrie descriptive à un objet important, et, d'après leur rapport, l'Académie en a voté l'impression dans le recueil des *Mémoires présentés.*

M. Dupin travaille depuis long-temps à un traité d'architecture navale, divisé en deux parties, et qui doit être composé de quatre volumes in-4°, et d'un volume de planches, grand-Atlas.

« Comme un travail de ce genre ne se trouve pas dans la
« *Collection des Arts et Métiers*, les commissaires proposent d'y
« faire réunir le Tableau de l'Architecture navale aux XVIIIe et
« XIXe siècles, dès que l'auteur aura terminé son ouvrage. »
(Commissaires, MM. Laplace, Beautems-Beaupré, et Sané, rapporteur.)

Cette proposition a obtenu les suffrages de l'Académie; et l'auteur, pour compléter son travail, vient de faire en Angleterre un voyage dans lequel les savans et les directeurs des divers établissemens se sont fait un plaisir de lui communiquer tous les renseignemens qui pouvaient l'intéresser. Actuellement à Dunkerque, il emploie tous les momens que peuvent lui laisser les fonctions dont il est chargé, à rédiger et mettre en ordre les riches matériaux qu'il a recueillis.

Dans un voyage qu'il avait fait précédemment à Rochefort, il avait eu l'occasion de voir et d'étudier les machines construites d'après les projets de M. Hubert, officier de génie maritime. Le Mémoire dans lequel il les a décrites a fixé l'attention de l'Académie.

Ces machines sont, 1° un *Dynamomètre pour éprouver la force des cordages et des toiles à voiles*. Les principaux motifs qui ont fait préférer cette machine à celle qu'on employait précédemment, sont sa précision, sa simplicité, et le peu d'efforts qu'elle exige sur les barres de la manivelle, relativement au degré de tension du cordage en expérience.

2° Une machine *pour compter le nombre de tours que fait un axe se mouvant dans des colliers fixes*. M. Hubert a fort heureusement simplifié l'ancien mécanisme auquel il a substitué deux roues minces de même diamètre, et juxta-posées qui portent l'une cent, et l'autre quatre-vingt-dix-neuf dents. Quand celle-ci, qui indique les centaines, aura fait une révolution entière, celle de cent, qui indique les dixaines et les unités, aura fait quatre-vingt-dix-neuf tours correspondans à 9900 tours de la machine.

3° Une machine *pour forer les parcs à boulets*. La tarière, perfectionnée par M. Hubert, économise la moitié de la force motrice.

4° Une machine *à percer dans le bois des trous cylindriques*. La nouvelle machine a pour objet de faciliter la manœuvre sans arrêter la rotation.

5° Une machine *à creuser les trous pour incruster les dez des rouets des poulies*. M. Hubert donne à son dez la figure d'un grand cercle, sur la circonférence duquel s'élèvent trois lunules ou portions de petits cercles ayant leurs centres aux sommets du triangle équilatéral inscrit au grand cercle.

6° Une machine *à mortaiser les caisses des poulies*. Pour bien

concevoir la construction et les avantages de cette machine, il faudrait en avoir un modèle sous les yeux.

7° Un *Moulin à draguer*. M. Hubert a su remédier à tous les inconvéniens de l'ancien moulin. Le prix d'un seul curage, tel qu'on l'exécutait autrefois, a suffi pour payer les frais du nouveau moulin, et le modique salaire de deux condamnés, chargés de la surveillance de ce moulin, remplace la dépense que faisaient autrefois cinquante-six bœufs et leurs conducteurs.

8° *Machines diverses mues par le moulin à draguer*. La première est un laminoir qui offre plusieurs détails ingénieux; la seconde fait mouvoir les meules dont on se sert pour broyer les couleurs avec lesquelles on peint l'intérieur et l'extérieur des vaisseaux. Enfin, dans le second étage du moulin, M. Hubert a placé un tour à tourner les essieux des poulies. Ce tour est mu par la force du vent.

M. Hubert fait exécuter en ce moment, à Rochefort, un moulin à scie, qui aura la propriété de diviser les bois non-seulement en parties planes, mais suivant des surfaces développables quelconques.

Les commissaires, en terminant leur rapport, font remarquer que M. Dupin et M. Hubert sont deux anciens élèves de l'École Polytechnique, et qu'il est maintenant peu de branches soit des hautes sciences, soit des arts utiles aux services publics et à la société en général qui ne doivent aux hommes sortis de cet établissement célèbre, ou quelque découverte ou quelque amélioration. (Les commissaires étaient MM. Molard, et Prony, rapporteur.)

M. Hachette a présenté deux Mémoires sur l'écoulement des fluides par des orifices en minces parois. Dans le premier, approuvé par l'Académie, sur le rapport de MM. Ampère, Girard, et Poisson, rapporteur, l'auteur traite de la contraction de la veine fluide, de la cause des singuliers phénomènes que pré-

sentent les ajutages cylindriques ou coniques, et enfin de la figure de la veine fluide, et des variations qu'elle éprouve suivant les différentes formes de l'orifice.

C'est un principe généralement admis, qu'à pression égale, et l'aire de l'orifice restant la même, la dépense ne varie pas. M. Hachette trouve en effet que le principe est exact dans les cas où l'orifice est circulaire, triangulaire, elliptique, ou formé d'un arc de cercle et de deux lignes droites. Mais il trouve des produits très-différens lorsque le contour de l'orifice présente des angles rentrans.

Si l'orifice est circulaire et que le plan dans lequel il est percé ne soit pas horizontal, la veine fluide forme une courbe qui doit être une parabole correspondante à une vîtesse initiale, que l'auteur a déterminée par des mesures directes; calculant ensuite la vîtesse du fluide en un point déterminé, par exemple, à l'endroit de la plus grande contraction, il trouve que le théorême de Torricelli est exact quand on le rapporte à cette section de la veine, mais qu'il ne saurait être vrai en même temps par rapport à la vîtesse moyenne des molécules qui traversent la section de l'orifice, à cause de la différence entre les aires des deux sections.

Pour déterminer la quantité de la contraction par le rapport de la dépense observée à la dépense calculée, l'auteur a suivi la règle prescrite par D. Bernoulli, en prenant d'ailleurs toutes les précautions nécessaires pour atténuer les erreurs de l'observation; un tableau placé à la fin du Mémoire présente les résultats de vingt-huit expériences sur des hauteurs d'eau comprises entre 135 et 888 millimètres, et pour des orifices dont les dimensions varient depuis 1 jusqu'à 41 millimètres. La moindre contraction est de 0.781 pour le plus petit diamètre. Pour des diamètres au-dessus de 10^{mm}, la contraction devient presque constante, car elle est comprise entre 0.60 et 0.63. A égalité d'orifice

elle augmente un peu avec la hauteur du fluide; il paraît au contraire qu'elle est indépendante de la direction du jet. Newton trouvait 0.70, et Borda 0.60. Plusieurs causes ont pu produire, cette différence. M. Hachette trouve que, toutes choses égales d'ailleurs, cette dépense est la plus petite quand la paroi en contact avec le fluide est convexe, et qu'elle augmente quand la surface est plane; elle augmente encore si la surface devient concave; ainsi la dépense variera d'un vingtième quand l'on retournera le disque de cuivre sur lequel est percé l'orifice aux minces parois, si l'une des surfaces du disque est convexe et l'autre concave.

Il observe enfin, que si l'orifice est grand, et que son diamètre soit une fonction donnée de celui du cylindre, le temps de l'écoulement dépendra de l'espèce de transcendantes dont M. Legendre a donné des tables étendues dans ses exercices de calcul intégral.

Poleni avait remarqué que la dépense augmente d'un tiers si l'on ajoute un ajutage cylindrique d'une longueur triple du diamètre de l'orifice. M. Venturi a fait voir qu'avec un ajutage composé d'un cylindre d'une certaine longueur et terminé par deux cônes dont il a fixé les dimensions, on pouvait augmenter la dépense dans le rapport de 12 à 5. En changeant la forme de l'appareil de M. Venturi, M. Clément est parvenu à augmenter notablement la dépense. Cette augmentation tient à ce que le fluide coule à plein tuyau dans l'ajutage, ce qui fait disparaître la contraction de la veine; il restait à expliquer d'une manière satisfaisante pourquoi le fluide remplit ainsi le tuyau. M. Hachette en trouve la cause principale dans l'adhésion du fluide aux parois de l'ajutage, c'est-à-dire dans la force qui produit les phénomènes capillaires et d'autres phénomènes analogues. C'est ce qu'il parvient à démontrer par diverses expériences.

La troisième partie du Mémoire contient la description des

différentes branches que présente la veine fluide pour certaines figures de l'orifice.

L'Académie, en approuvant ce travail, avait invité l'auteur à continuer ses recherches. Cette continuation se trouve dans un second Mémoire, approuvé de même, sur le compte avantageux qu'en ont rendu MM. Poisson, Ampère, et Cauchy, rapporteur. L'auteur y détermine l'influence qu'exercent sur les phénomènes de l'écoulement, par un orifice de grandeur donnée, la grandeur de l'orifice, sa forme, celle de la surface sur laquelle il est placé, l'addition d'un ajutage cylindrique ou conique, la hauteur et la nature du liquide, enfin le milieu environnant.

De ces nouvelles expériences il résulte qu'il faut porter à 0.31 au lieu de 0.22 la contraction pour un orifice circulaire d'un millimètre de diamètre. C'est celle qui a lieu dans l'appareil dont on se sert pour jauger les eaux courantes, par pouces de fontainier.

Le rapporteur appelle *contraction*, la perte éprouvée par la veine qui, de 1.00 s'est réduite à 0.78 ou 0.69. Dans ces deux cas, la contraction sera le complément à 100 de la veine contractée, c'est-à-dire 0.22 et 0.31. Il soupçonne que les variations observées dans cette contraction pourraient venir de ce qu'il ne serait plus permis de regarder comme étant à mince paroi une plaque dont l'épaisseur serait comparable au diamètre de l'orifice.

L'addition d'un ajutage dans lequel le fluide coule à plein tuyau, produit le double effet de dilater la veine et de diminuer la vitesse. Si la longueur de l'ajutage n'est pas considérable, le premier de ces deux effets est seul sensible, et la dépense augmente. Si la longueur devient considérable relativement à l'orifice, la dépense diminue, et il peut arriver que l'écoulement ne se fasse plus que goutte à goutte, si le tube est capillaire.

La contraction de la veine diminue ou augmente avec la hauteur du liquide au-dessus de l'orifice, ou, ce qui revient au même, avec la pression qui résulte de cette hauteur; il était naturel d'en induire que dans le cas où l'on se sert d'un ajutage, le fluide, sous des pressions toujours constantes, doit tendre de plus en plus à se détacher des parois de l'ajutage et peut finir par s'en séparer. La pression nécessaire pour effectuer la séparation, diminue avec la longueur de l'ajutage; elle est plus petite pour un ajutage conique que pour un ajutage cylindrique, et elle décroît en même temps que l'angle du cône; c'est ce que l'expérience a confirmé.

Lorsque la hauteur du fluide au-dessus d'un orifice devient très-petite, la veine fluide peut obtenir une forme toute différente de celle qu'elle affectait auparavant, et qui paraît indépendante de la forme de l'orifice.

Lorsque le vase qui renferme le liquide a des dimensions très-petites, relativement à celle de l'orifice, la forme de la veine se trouve sensiblement altérée, et devient très-irrégulière, mais on peut toujours faire disparaître l'irrégularité, en augmentant indéfiniment la hauteur du liquide.

Les phénomènes, pour la plupart, restent sensiblement les mêmes, quand on substitue le mercure à l'eau.

L'alcool, dont les molécules adhérent moins l'une à l'autre que celle de l'eau, s'écoule plus promptement; la pression à laquelle la veine fluide se détache des parois d'un ajutage est aussi plus faible que pour l'eau.

Si l'on substitue l'huile à l'eau, la viscosité du fluide augmente considérablement la durée de l'écoulement par les petits orifices. Pour un orifice d'un millimètre, les temps d'écoulement des deux liquides sont dans le rapport d'un à trois.

La nature du liquide est une des causes principales desquelles

dépend la continuité ou la discontinuité du jet dans l'écoulement par des tubes capillaires.

L'air environnant peut modifier la pression que le liquide exerce sur l'orifice, il peut opposer une certaine résistance à la sortie du liquide. M. Hachette n'a observé aucune différence dans la forme des veines fluides qu'a données dans l'air et dans le vide l'écoulement de l'eau et du mercure par un orifice triangulaire. Il s'est assuré que si un tube de 6.mm6 peut donner pour diverses densités de l'air des produits différens, c'est que la veine fluide remplit l'ajutage dans un cas et ne le remplit pas dans l'autre.

La conclusion des commissaires est que M. Hachette a déterminé avec beaucoup de soin les principales circonstances des phénomènes qu'il a observés, et quelquefois même les lois de ces phénomènes. Il leur paraît cependant qu'il reste encore plusieurs questions à résoudre, et ils l'engagent à les prendre en considération dans ses recherches ultérieures.

Mémoire de M. Hachette, *sur la Théorie des lignes et des surfaces courbes. Commissaires, MM.* Legendre, *et* Arago, *rapporteur.*

« Ce Mémoire peut être considéré comme le complément du « Traité de Géométrie descriptive de M. Monge. Ce bel ouvrage, « dont M Hachette a donné lui-même une nouvelle édition en- « richie de notes, renferme les principes généraux de la méthode « des projections, et les applications qu'on en fait à la déter- « mination des plans tangens et à la recherche des intersections « des surfaces. Les questions qui se rapportent aux courbes à « double courbure n'y sont qu'effleurées. L'auteur les avait « traitées par l'analyse, avec beaucoup de soin et de détail, dans « un ouvrage non moins original, et qui servait aussi à l'ensei-

« gnement de l'École Polytechnique. M. Hachette se propose « aujourd'hui de rendre ces mêmes théories accessibles à ceux « qui seraient totalement étrangers au calcul différentiel et inté- « gral.... Le Mémoire de M. Hachette est écrit avec méthode « et clarté, et semble très-propre à remplir l'objet que l'auteur « s'est proposé. » Pour preuve de leur opinion, les commissaires exposent la méthode imaginée par M. Hachette, pour mener une tangente à une courbe, soit plane, soit à double courbure, et dont la nature est inconnue. La même construction donne le centre de courbure et le plan osculateur. Mais ces détails ne sont pas de nature à entrer dans notre notice.

Recherches sur le Mouvement des ondes, par feu M. DE BRÉMONTIER, *inspecteur-général des ponts-et-chaussées. Commissaires, MM.* de Prony, Sané, *et* Ampère, *rapporteur.*

On trouve dans cet ouvrage, 1° des observations tellement nouvelles à l'époque où il a été écrit, qu'on les regarda dans le temps comme incompatibles avec la théorie généralement adoptée.

2° Des explications plus ou moins satisfaisantes de divers phénomènes relatifs aux effets des ondes, et à ceux des marées dont la cause n'était pas connue quand il en fit l'objet de ses recherches.

3° Des applications de sa théorie soit à la navigation, soit aux constructions hydrauliques à la mer.

Parmi les observations de M. Brémontier, il y en a une d'autant plus remarquable qu'elle devait être regardée comme inexplicable avant le travail que vient de faire M. Poisson, sur le mouvement des ondes. D'autres observations, dont les résultats paraissent également incontestables sur la relation qui existe entre la longueur et la largeur d'une onde dans les changemens qu'elle

éprouve, à mesure qu'elle s'étend; sur les dimensions qu'elle prend par l'action continuée de la cause qui l'a produite; sur les changemens qu'elle éprouve, quand elle passe d'une mer profonde à des endroits où le fond se rapproche de la surface; sur les phénomènes que présentent les vagues à la rencontre des rivages, suivant qu'ils leur opposent des plans verticaux, ou plus ou moins inclinés, etc., n'offrent pas moins d'intérêt, et paraissent propres à fournir des matériaux précieux à un ouvrage plus complet que n'a pu l'être celui de M. Brémontier, à une époque où l'on manquait des secours qu'offre maintenant la mécanique rationnelle à celui qui entreprendrait aujourd'hui le même travail.

Quelques-unes de ces observations conduiraient immédiatement à une conséquence qui paraît contraire aux résultats de la théorie. Telle est celle de la grande profondeur à laquelle paraît s'étendre l'agitation de la mer. Les faits que l'auteur cite à l'appui de son opinion semblent tellement concluans, qu'il faudrait peut-être, avant de la rejeter, chercher s'il n'y a pas quelque moyen de la concilier avec la théorie mathématique, où l'on fait abstraction de plusieurs circonstances qui peuvent influer sur cette profondeur.

Les explications que donne M. Brémontier des phénomènes constatés par l'expérience, sont claires, exactes, et elles étaient alors bien moins faciles à trouver qu'elles ne le seraient aujourd'hui. Celle de la barre ou mascaret dans les fleuves a paru la seule qui laissât quelque chose à desirer, au moins du côté de la clarté.

A l'égard des applications que M. Brémontier fait de sa théorie à la pratique des constructions hydrauliques à la mer, il serait difficile d'en juger sans le secours d'expériences faites en grand, vu la multiplicité des causes encore peu connues; mais ces applications sont appuyées sur un si grand nombre de faits et de considérations théoriques indubitables, que l'on doit vivement

desirer que les expériences de M. Brémontier soient reprises, et qu'on en ajoute de nouvelles.

Le rapport finit par un juste tribut d'éloges à la mémoire d'un homme « que ses talens, son zèle ardent et désintéressé pour le « bien public, et les grands travaux qu'il a exécutés avec succès « pour préserver de vastes terrains de l'envahissement des dunes, « ont placé au nombre des hommes les plus utiles à leur pays. »

Pompe centrifuge de M. JORGE. *Commissaires, MM.* Prony, de Rossel, Girard, *rapporteur.*

L'idée d'une pompe dont les effets seraient produits par la force centrifuge n'est pas nouvelle. Une machine de ce genre a été décrite dans le Recueil de l'Académie en 1732. Euler, en 1751, en fit l'objet d'un Mémoire, publié par l'Académie de Berlin. La pompe centrifuge de M. Erskine est décrite dans l'Encyclopédie Britannique, édition de 1778. En 1777, M. le marquis Ducrest en avait présenté une autre à l'Académie, en se réservant d'exposer, dans un Mémoire particulier, la manière dont il devait former ses tuyaux avec une substance particulière qui réunirait une grande force à une grande légèreté. Les commissaires développent les raisons qui se sont opposées au succès de ces diverses tentatives, et s'attachent à montrer comment M. Jorge est parvenu à remédier à tous les inconvéniens. Le Mémoire dont ils avaient à rendre compte était accompagné de dessins très-détaillés, qui en expriment toutes les parties avec beaucoup de clarté et de précision. L'auteur a fait exécuter un modèle en grand; l'eau s'y élève à plus de cinq mètres, au moyen d'un aspirateur de 11 centimètres de diamètre. Le rayon des branches transversales est de 54 centimètres environ. « M. Charles, alors président de l'Académie, et les commissaires réunis, ont été témoins des effets « de cette machine, et le succès leur en a paru tel que l'auteur

« l'avait annoncé. Ils regrettent seulement que la localité n'ait « point permis d'employer convenablement la force motrice, et « par conséquent de faire un calcul exact de l'effet utile de cette « machine.

Ils pensent au surplus « que sans rien préjuger sur l'emploi « spécial qu'on peut en faire dans la marine ou pour les épui- « semens, le perfectionnement de la pompe centrifuge, présentée « par M. Jorge, doit contribuer à rendre cet ingénieux appareil « d'un usage plus général, et qu'il mérite l'approbation de l'Aca- « démie. »

Phénomènes de la diffraction de la lumière, par M. FRESNEL. *Commissaires*, *MM.* Poinsot, *et* Arago, *rapporteur.* 25 *mars* 1816.

Au carton blanc sur lequel les physiciens recevaient les bandes irisées qui bordent les ombres, M. Fresnel a imaginé de substituer un miroir légèrement dépoli dont les facettes dispersent la lumière dans tous les sens, tant par réflexion, que par réfraction; il se forme ainsi sur la surface dépolie des peintures de l'ombre et des franges qui ont une grande netteté, et qui peuvent être examinées par derrière avec une forte loupe, sans que l'observateur ait besoin de placer la tête entre le corps opaque et le tableau. Le seul inconvénient est que l'éclat des teintes se trouve un peu affaibli; mais M. Fresnel a reconnu, depuis, que l'interposition de ce verre est inutile, et qu'on peut avec la loupe apercevoir distinctement les bandes, quelle que soit la distance au corps opaque. En les suivant de cette manière avec une loupe d'un court foyer, on les voit se rapprocher graduellement du corps qui les produit, n'en être ensuite séparées que par un intervalle d'un centième de millimètre au plus, et disparaître enfin complétement lorsque le bord du corps passe par le foyer de la loupe.

De cette manière, l'auteur a remarqué que l'angle sous lequel un rayon est infléchi en passant près d'un corps n'est pas constant, qu'il augmente assez rapidement à mesure que le corps se rapproche du point lumineux; il a mesuré les angles à diverses distances, et il a vu que la déviation qu'un corps éprouve dans sa marche dépend du chemin qu'il a parcouru depuis son origine jusqu'au bord du corps qui le diffracte.

Un fait non moins remarquable, c'est que, pour une distance constante et quelconque du point lumineux au corps, l'angle de diffraction varie suivant qu'on détermine la position des bandes dans tel ou tel autre point de leur trajet; ce qui entraîne la conséquence singulière, que les rayons qui la forment ne se meuvent pas en ligne droite; ainsi l'auteur a été conduit à penser que les trajectoires des franges de tous les ordres sont des hyperboles dont les foyers communs sont le bord du corps et le point lumineux. Il trouve, comme Young, que les franges intérieures naissent du concours des deux faisceaux infléchis dans l'ombre par les deux bords opposés du corps. Avec sa loupe seule, il les suit depuis le moment où elles se meuvent comme de très-minces filets lumineux, également espacés et sans aucune coloration apparente, jusqu'aux distances où chacune d'elles occupe une plus grande étendue, et paraît sensiblement irisée. Les bandes intérieures ne partent pas des bords du corps, et se meuvent à-peu-près en ligne droite; elles sont à toute distance, symétriquement placées de part et d'autre du centre de l'ombre, qui toujours est un filet clair. Les intervalles qui les séparent sont proportionnels à la distance du corps au micromètre, et ne dépendent pas de celle du point lumineux.

Pour les bandes extérieures, les intervalles sont indépendans des dimensions du corps qui porte ombre; pour les autres, elles sont d'autant moindres, à parité de circonstances, que le corps est plus large.

M. Fresnel a découvert, par des observations multipliées, que pour une distance constante du micromètre à des fils de différentes grosseurs, les largeurs des bandes sont juste en raison inverse des diamètres de ces fils. Il se sert de cette belle loi pour expliquer les franges hyperboliques qui se forment dans la fameuse expérience des couteaux de Newton.

M. Fresnel considère la lumière comme les ondulations d'un milieu subtil et doué d'une grande élasticité: c'est l'opinion de Hooke, d'Huygens, d'Euler, etc. Il distingue dans chaque onde lumineuse des parties analogues à celles que D. Bernoulli a nommées *ventres* et *nœuds*, dans son Mémoire sur le son et les tuyaux d'orgue. Il admet que deux ondulations qui se rencontrent sous un petit angle peuvent s'affaiblir dans les points où les nœuds de l'une coïncident avec les ventres de l'autre, et que l'intensité sera au contraire augmentée par-tout où les parties analogues des mêmes ondulations se réuniront. Ces changemens au reste ne doivent être que momentanés; en sorte que des rayons qui se sont obscurcis parce qu'ils étaient en discordance, acquièrent de nouveau leur ancien éclat quand la discordance cesse.

Nous ne suivrons pas l'auteur dans la construction qu'il donne pour représenter les croisemens qui doivent donner naissance aux bandes diffractées. C'est par des considérations analogues qu'il explique le phénomène des anneaux colorés, et il a puisé dans les tables de Newton les valeurs des ondulations aériennes pour les rayons de toutes couleurs, et elles lui paraissent égales au double des épaisseurs dans lesquelles se produisent les anneaux du premier ordre. Il a fait de nombreuses mesures des bandes à toutes les distances possibles du point lumineux au fil, et du fil au carton; par-tout le calcul et l'observation se sont accordés dans les limites de quelques centièmes de millimètre. Les tableaux que renferme le Mémoire mettent dans tout son jour cette belle découverte de l'auteur, que les bandes de différens ordres ne se propagent pas en ligne droite.

« Il a cherché aussi à rattacher les lois de la réflexion et de la « réfraction de la lumière à sa Théorie des accords et des discor- « dances des ondes. Les raisonnemens, tout ingénieux qu'ils sont, « ne feront probablement pas abandonner, pour le moment, « l'explication si claire que Newton a donnée de la réfraction dans « le système de l'émission.

« Le fait découvert par M. Fresnel, de la propagation des « bandes dans des hyperboles, nous semble un des plus curieux « résultats de l'optique. Dans la Théorie des accords et des dis- « cordances, il n'est pas nécessaire d'attribuer un mouvement « courbe à la lumière, il suffit de supposer que les intersections « des ondes, qui, par leur concours produisent les franges, ne « sont pas situées sur une ligne droite. Nous ignorons comment « ce mouvement singulier pourrait se concilier avec l'hypothèse « de l'émission.

« Les circonstances les plus simples de la formation des bandes « intérieures sont inexplicables, ou du moins inexpliquées dans « la théorie ordinaire.... Si nous ajoutons qu'il n'est aucune « expérience de diffraction connue jusqu'à-présent qui ne puisse « être, nous ne dirons pas expliquée, mais même calculée, on « ne pourra s'empêcher d'avouer, quelque opinion qu'on ait « d'ailleurs sur le fond de la question, que l'hypothèse de « M. Fresnel mérite d'être suivie et de fixer l'attention des phy- « siciens et des géomètres.

« Nous pensons en conséquence, 1° que l'Académie devra ac- « corder des témoignages de satisfaction à M. Fresnel, pour les « belles expériences qu'il a faites sur la formation des franges « diffractées et sur les lois de leur propagation dans l'espace; « 2° que, sans rien statuer sur le mérite de l'hypothèse qu'il a « examinée avec tant de sagacité, elle pourrait engager cet habile « physicien à l'appliquer, s'il est possible, à d'autres phénomènes, « à éclaircir quelques points qui sont encore un peu obscurs, et « à faire toujours marcher de front, dans ses recherches, le calcul

« et l'observation. Nous proposerons enfin à l'Académie d'arrêter « que le Mémoire sera inséré dans le Recueil des savans étrangers. »

Le Mémoire de M. Fresnel a paru dans les Annales de Chimie et de Physique. Mars, 1816.

Expériences sur les anneaux colorés qui se forment par la réflexion des rayons à la seconde surface des plaques épaisses, et sur un nouveau phénomène qui s'y rapporte, par M. Pouillet. *Commissaires, MM.* Ampère *et* Poisson, *rapporteur, 22 janvier* 1816.

M. Pouillet a d'abord répété les expériences de Newton, et il en a reconnu l'*admirable exactitude;* il a fait ensuite des expériences analogues, en employant des miroirs de diverses formes et de différentes épaisseurs; les diamètres des anneaux qu'il a mesurés se sont trouvés, dans tous les cas, parfaitement d'accord avec ceux qu'il a calculés d'après la théorie. Son Mémoire renferme plusieurs tableaux où sont rapportées les grandeurs calculées et observées, et l'on n'y remarque que des différences si petites, que l'on peut les attribuer sans scrupule aux erreurs inévitables des observations. En liant à la théorie des accès celle de ces phénomènes, l'auteur explique la formation des anneaux. Les modifications qu'y éprouve la lumière n'ont lieu qu'à la seconde surface du verre. M. Pouillet en a conclu que si l'on supprimait la matière comprise entre ces deux surfaces et qu'on la remplaçât par de l'air, de l'eau, ou quelque autre substance, il devrait encore se produire des phénomènes analogues; conjecture qu'il a vérifiée, en mettant devant un miroir métallique une lame mince de mica, qui remplaçait la première surface du verre; et calculant, par les formules de M. Biot, ces nouvelles expériences, il a trouvé le même accord que dans les précédentes. Faute d'avoir mesuré les diamètres, le duc de Chaulnes avait

présenté les résultats comme une exception à la théorie de Newton, tandis qu'ils en sont au contraire une importante confirmation.

Enfin M. Pouillet a reconnu qu'il n'est pas nécessaire que le rayon lumineux traverse la matière même de la lame qu'on place devant le miroir métallique. Si l'on y pratique un trou, au travers duquel on fait passer la lumière, la portion qui est réfléchie irrégulièrement par le miroir, et qui vient repasser une seconde fois par le trou, produit encore des anneaux colorés comme dans les cas précédens; ce qui montre que l'action inconnue qui émane des bords de l'ouverture faite à la lame, s'exerce à distance sensible sur la lumière. La forme de cette ouverture peut être telle qu'on voudra, on peut même la remplacer par le simple bord d'une lame opaque; il se forme toujours des anneaux dont les diamètres suivent la loi ordinaire des racines quarrées des nombres impairs, et qui varient en grandeur absolue avec la distance de la lame au miroir réflecteur. Seulement il faut observer que dans le cas de la lame opaque, les anneaux sont encore parfaitement circulaires, mais leur intérieur est très-faible dans une portion de leur circonférence. « On pourrait peut-être penser que les « anneaux d'une intensité inégale se confondent avec les bandes « lumineuses de la diffraction, mais l'auteur ne se prononce pas « sur l'identité ou la différence des deux phénomènes, et c'est « une question qu'il se propose de décider par de nouvelles expé- « riences.

« L'Académie verra sans doute avec plaisir le premier travail « d'un jeune physicien qui joint à l'art de faire des expériences « exactes, la sagacité qui en suit toutes les conséquences..... « Nous pensons qu'il est digne de tous les encouragemens de « l'Académie, et que son Mémoire mérite d'être approuvé et « imprimé dans le Recueil des savans étrangers. »

Nous avons annoncé ci-dessus ses nouvelles recherches à l'oc-

casion du Traité de Physique de M. Biot, qui les y a insérées comme supplément à l'Optique. On y voit, page 751, que *les anneaux et les bandes diffractées diffèrent essentiellement des anneaux et des bandes qui rejaillissent par réflexion de la seconde surface des plaques épaisses.* Et, page 752, cette seconde loi: *Lorsque la lumière passe dans une ouverture circulaire ou rectiligne très-étroite, les diamètres des anneaux réfractés et les intervalles des bandes diffractées de même ordre, formées par chaque espèce de lumière simple, sont proportionnels aux longueurs des accès de ses particules, et les anneaux ou bandes diffractées des différens ordres répondent à la succession de ces accès.* Pour le surplus de ce Mémoire intéressant, nous renverrons à l'ouvrage dans lequel il a été consigné en entier.

Nouvelles Lunettes de spectacle, par M. CAUCHOIX. *Commissaires, MM.* Charles, Poisson, *et* Biot, *rapporteur.* 22 *janvier* 1816.

On donne aux lunettes de ce genre un objectif à large ouverture, on n'emploie qu'un faible grossissement, et la distance focale de l'objectif doit être fort courte. Il en résulte que les aberrations de réfrangibilité et de sphéricité sont très-sensibles. Pour y remédier, il faut trouver des courbures telles que ces aberrations se compensent ou s'atténuent: de telles combinaisons de courbure sont aujourd'hui ce qu'il y a le plus à desirer pour le perfectionnement des grands objectifs. Dans les lunettes de spectacles on n'avait pu atteindre encore qu'au grossissement de $2\frac{1}{2}$ ou de 3 fois. Le nouveau pas fait par M. Cauchoix consiste à avoir trouvé le moyen de détruire complétement les deux aberrations de l'objectif, et à lui faire supporter un grossissement beaucoup plus considérable. A ces avantages il a su joindre celui d'une grande clarté; ce qui est dû en partie à l'introduc-

tion d'une couche mince d'un liquide dont la réfraction est presque moyenne entre celle des deux verres, et qui unit les surfaces consécutives du flint et du crown. Des verres ainsi collés se maintiennent depuis vingt ans sans altération. Ces nouvelles lunettes grossissent jusqu'à sept fois; elles sont faites avec du crown et du flint français; éprouvées au spectacle, ou, pendant le jour, sur des objets terrestres, leur effet a toujours paru excellent. Dollond avait déja obtenu des grossissemens égaux ou supérieurs, mais c'était en diminuant les ouvertures de l'objectif et de l'oculaire, d'où il resultait que ses lunettes donnaient très-peu de lumière, en sorte qu'elles ne pouvaient guères servir que de jour. En ce genre, M. Cauchoix avait porté le grossissement jusqu'à vingt fois, mais il a totalement abandonné ce système.

La conclusion des commissaires est que son nouveau travail doit mériter à M. Cauchoix l'approbation de l'Académie, et qu'on doit l'engager à essayer d'en transporter les avantages à de plus grands objectifs.

Lunettes de spectacle, de l'invention de M. Le Rebours. *Commissaires, MM.* Bouvard, Biot, *et* Arago, *rapporteur.* 23 *décembre* 1816.

Pour juger les nouvelles lunettes, les commissaires ont pris pour terme de comparaison les lunettes de M. Cauchoix, dont le rapport précédent établit la supériorité sur tout ce qui s'était fait précédemment; par des expériences nombreuses et variées, ils ont cru pouvoir s'arrêter à cette conclusion : « Qu'à parité « de circonstances les lunettes de M. Le Rebours terminent un « peu mieux en général que celles de M. Cauchoix, et que celles-ci « à leur tour sont légèrement supérieures en lumière. M. Cauchoix « introduit entre les verres une substance... qui détruit toute « réflexion intermédiaire et augmente la clarté; cet artifice at-

« ténue beaucoup les effets des irrégularités du travail... Dans « les objectifs de M. Le Rebours, les lunettes de flint et de crown « sont seulement superposées' C'est un avantage dont le temps « peut seul déterminer l'importance. L'Académie a déja eu plu- « sieurs occasions de s'occuper des importans travaux de M. Le « Rebours. C'est à lui que les astronomes français doivent le « plaisir de pouvoir placer une lunette française en tête des « meilleurs instrumens de l'Observatoire Royal. Un nouvel ob- « jectif, de 18 centimètres (6 pouces $\frac{3}{4}$) dont on étudie maintenant « les effets, prouve que cet artiste cherche avec le zèle le plus « louable et le plus désintéressé, à vaincre les difficultés qu'ont « rencontrées jusqu'ici les opticiens qui se sont occupés de ces « grands instrumens. Nous desirons vivement que M. Le Rebours « puisse trouver dans le débit des excellentes lorgnettes qu'il vient « de construire, les moyens de continuer ses utiles et laborieuses « recherches.

« En général, il nous semble que l'Académie doit voir avec « plaisir, et encourager par son approbation, les travaux de deux « artistes qui, pour la construction des instrumens d'optique, « sont parvenus à nous rendre tout-à-fait indépendans de l'étran- « ger. Nous ne serions pas même éloignés de penser que leurs « ateliers renferment dans ce moment un plus grand nombre « d'excellentes lunettes achromatiques à large ouverture, qu'il ne « s'en trouverait chez tous les opticiens de Londres réunis. »

Miroirs Parallèles de MM. Richer fils. *Commissaires, MM.* Bouvard, *et* Arago, *rapporteur.* 11 *mars* 1816.

Ces verres, d'un travail très-difficile, sont employés dans la construction des instrumens à réflexion, dans celle des horizons artificiels pour les observations qu'on fait à terre.

MM. Richer ont pensé que, s'ils parvenaient à construire eux-

mêmes les miroirs parallèles, et à s'affranchir du tribut que presque tous les artistes de l'Europe payaient aux opticiens anglais, ils pourraient faire une diminution sensible sur le prix des instrumens à réflexion, et que par-là ils contribueraient à en répandre l'usage. Leurs efforts n'ont pas été infructueux.

Les miroirs remis aux commissaires étaient de 11 centimètres ou 4 pouces. Placés devant l'objectif de la lunette méridienne de l'Observatoire, ils n'altèrent pas le foyer d'une manière sensible. On les a soumis à une autre épreuve, en regardant avec une forte lunette l'image d'un objet éloigné réfléchie sur leur surface. Il restait à mesurer l'inclinaison mutuelle des faces opposées; rarement on a pu trouver des déviations de 3". Un miroir anglais, acquis à Londres par M. Cauchoix, placé dans les mêmes circonstances, a donné des écarts sensiblement plus grands.

Les miroirs de deux millimètres d'épaisseur paraissent avoir éprouvé, dans quelques points, des flexions qui altéraient la netteté des images; il est à desirer que MM. Richer choisissent dorénavant des verres plus épais. Il paraîtrait aussi très-convenable de travailler les verres dans des dimensions plus grandes que celles qu'ils doivent conserver. Avec ces attentions, dont MM. Richer ont reconnu l'utilité, leurs miroirs plans pourront soutenir la concurrence avec tout ce qui a été exécuté de plus parfait de ce genre tant en France que dans les pays étrangers.

« Les astronomes et les physiciens ont eu de fréquentes oc-
« casions d'apprécier le mérite de M. Richer père. Ils connaissent
« l'ingénieux instrument que cet artiste a imaginé pour réduire
« en distances vraies les distances apparentes de la lune aux étoiles;
« ses travaux pour perfectionner l'hygromètre à cheveu; ses mi-
« cromètres sur verre... dont la finesse et la pureté des divisions
« est telle que 500 ne remplissent pas un millimètre.... Nous
« pensons que l'Académie n'apprendra pas sans intérêt que
« MM. Richer fils ont profité des utiles leçons qu'ils ont dû

« recevoir à une aussi bonne école, et qu'elle accordera son suf-
« frage à leur zèle et aux succès qu'ils viennent d'obtenir. »

Précis des travaux géographiques dont la Martinique a été l'objet, depuis l'organisation de la colonisation de cette île; et Notice sur la Carte physique, minéralogique, statistique et militaire de la même île, par M. Alexandre Moreau de Jonnès, *correspondant de l'Académie.*

Dès l'an 1640, le missionnaire Dutertre visita l'île et dressa un croquis de ses côtes. L'exactitude en paraît étonnante quand on considère les obstacles qu'il a dû trouver dans les bois qui couvraient alors la totalité de l'île et dans le voisinage des Caraïbes. En 1693, un autre missionnaire, le P. Labat, envoyé à la Martinique, dressa, pour la joindre à son Voyage, qui ne parut qu'en 1722, une autre carte qui semblerait n'être qu'une copie de celle du P. Dutertre, s'il n'avait rempli le périmètre de reliefs dessinés d'imagination. Le P. Dutertre avait esquissé et nommé la montagne Pelée; il avait figuré les deux pitons du Carbet, sans leur donner de nom; le P. Labat les nomma dans sa carte et les représenta comme deux hauts reliefs dentelés; il indiqua le lac de la Montagne Pelée, et le premier il figura le morne de la Calebasse et le gros morne. Mais il exagéra beaucoup les dimensions de ce dernier.

Le P. Laval, en 1720, fit une carte qui ne diffère pas essentiellement de la plus ancienne.

Le P. Feuillée, en 1725, fit une carte plus inexacte qu'aucune des précédentes.

En 1741, La Condamine, en visitant le sommet du volcan éteint de la Montagne Pelée, gagna la fièvre jaune, à laquelle il n'échappa que par un rare bonheur. Le seul résultat de son

excursion fut une mesure approximative de la hauteur de la montagne.

En 1751, Chanvalon, qui avait été administrateur à la Martinique, donna à son tour une carte qui ne se distingue des précédentes, qu'en ce qu'elle est plus mal orientée. D'après l'opinion vulgaire, qui n'est peut-être elle-même qu'une tradition caraïbe, il désigna la montagne Pelée comme un ancien volcan, et il a transformé en un peloton de monticules en pain de sucre le piton volcanique du Carbet, dont les pyramides de porphyre sont deux fois hautes comme le Vésuve et le mont Hécla.

La carte dressée, en 1758, par Bellin, ne diffère des précédentes que par la grandeur de l'échelle et par les profils de relief jetés au hasard, et par les groupes informes qu'il y a placés pour désigner la montagne Pelée, le piton Vauclin, et ceux du Carbet.

Celle de Th. Jefferys, géographe du roi d'Angleterre, a été dressée d'après de prétendues observations d'un M. Houel : on n'y remarque que l'esquisse de reliefs imaginaires. Cette carte eut deux autres éditions qui ne sont pas plus fidèles.

En 1772, MM. Verdun, Borda, et Pingré, déterminèrent la longitude et la latitude du Fort-Royal, et les positions des points extrêmes et des principaux saillans de l'île, dont la position et l'étendue ne furent plus douteuses; il est à regretter que leurs observations aient été restreintes à l'hydrographie, et ne se soient pas étendues aux opérations géodésiques. Ils indiquèrent seulement la montagne Pelée, le Vauclin, et les pitons du Carbet, au nombre de trois. Dutertre et Labat n'en montrent que deux.

Enfin, en 1776, Moreau du Temple fut chargé de lever la carte physique et géodésique de la Martinique. Il mit dans ce travail immense autant de talent que de persévérance, et fit tout ce qu'il était possible de faire alors. Cette carte est le meilleur ouvrage de topographie qu'on ait sur l'archipel; mais les

parties qu'il fut obligé de confier à ses collaborateurs sont très-loin du degré de perfection des parties qui sont entièrement de lui. Malheureusement aussi ce géographe, très-instruit d'ailleurs, n'avait aucune connaissance géologique. En 1794, à la prise de l'île, cette carte tomba entre les mains du général anglais, Charles Grey, qui l'envoya en Angleterre, pour qu'on en multipliât les copies; elle périt dans l'incendie du vaisseau qui la transportait, et les soins qu'on avait pris pour sa conservation eurent un effet tout contraire. Le ministère anglais desirait une carte physique qui pût, dans tous les temps, servir à tracer les opérations militaires d'une invasion. Il en chargea un officier français nommé de Sanée, qui la commença en effet, mais il devint trop exigeant, et l'on eut recours à d'autres moyens.

Par suite du traité d'Amiens, la Martinique fut rendue à la France, des officiers de génie y furent envoyés, mais ils périrent presque tous de la fièvre jaune presque en arrivant. MM. Allaire et Moreau de Jonnès, aides-de-camp du commandant en second de la colonie, furent chargés de lever une carte nouvelle. A peine les opérations étaient-elles commencées, que M. Allaire fut atteint lui-même de la fièvre jaune, et périt au bout de cinq jours. M. Moreau de Jonnès ne résista qu'avec peine aux effets de l'action du soleil des tropiques et aux exhalaisons délétères qui s'élèvent des marais fangeux et des forêts humides qu'il avait à traverser journellement. Le général qui vérifiait les opérations sur le terrain périt enfin lui-même, et M. Moreau de Jonnès resta seul. Pendant huit années il s'occupa de ce travail: ensuite, devenu prisonnier de guerre, et retenu pendant six ans, il eut beaucoup de peine à sauver ses manuscrits.

Dès le commencement de ses opérations il put reconnaître que tout ce qu'on avait écrit sur cette île n'était fondé ni sur l'observation, ni sur la vérité. Il cite la description de Raynal pour la réfuter. Il affirme, contre le récit de cet auteur, que la

montagne Pelée est la plus accessible de tous les grands reliefs de l'île, qu'il n'y a aucune culture sur les pitons du Carbet, dont les versans ont de 70 et 80° de déclivité, et dont les pieds sont entourés de forêts de l'accès le plus difficile. Les sources dont parle Raynal sont des rivières qui ont plusieurs lieues de cours; elles ne sortent pas de la montagne Pelée, mais descendent en bien plus grand nombre du Carbet. Nous passons sous silence d'autres erreurs réfutées par M. de Jonnès, pour arriver aux résultats de ses propres observations.

« L'île a été formée de toutes pièces par les volcans, et, à « l'exception de quelques substances de formation secondaire, « toute la lithologie de la Martinique se compose de laves por- « phyritiques et cornéennes, de pierres-ponces et de basaltes « homogènes. »

Par des nivellemens et des observations barométriques, l'auteur a déterminé les points culminans et les principaux centres d'éruptions volcaniques; il a fait la reconnaissance détaillée de l'aire de chacun de ces anciens foyers; il a trouvé les limites de leur circonscription et l'étendue de leur périmètre. Il a observé soigneusement le cours des eaux; il cherche dans l'examen géologique des lieux, les circonstances de la formation des ports et du littoral, et les escarpemens des rivages; et, remontant jusqu'aux pitons, il a escaladé les grandes pyramides de laves porphyritiques; pour ses recherches, il fut obligé de dresser 225 levés, et plus de 80 profils, offrant la coupe orthographique de chaque système de volcans. Il a comparé des milliers de *specimens* lithologiques.

L'auteur a consigné dans un ouvrage *inédit* les détails de l'exploration géologique dont on vient de voir les principaux résultats. Un nouveau voyage, qu'il est sur le point d'entreprendre, lui permettra d'y faire plusieurs additions importantes. Il compte y réunir l'ensemble des hauteurs barométriques rec-

tifiées, la géographie des plantes, la topographie médicale, et le tableau des phénomènes météorologiques, qui ont lieu dans les différentes couches de l'atmosphère correspondantes aux diverses régions des hautes montagnes de la Martinique.

Précis d'un Traité analytique de Trigonométrie sphérique, par M. Henri. *Commissaires, MM.* Biot, Arago, et Delambre, *rapporteur.*

« Cet ouvrage est la collection la plus complète que nous con-
« naissions de formules applicables à tout triangle sphérique
« quelconque; ces formules se déduisent les unes des autres
« par des procédés purement analytiques, en partant de quelques
« équations fondamentales, fournies par une construction géo-
« métrique... Ce Précis est un riche répertoire où l'on trouvera
« au besoin toutes les formules dont l'application et la combi-
« naison doivent conduire à la solution de tous les problèmes
« qu'on peut se proposer dans la pratique de l'astronomie et de
« la géodésie. La marche de l'auteur est simple et uniforme....
« Son ouvrage prouve une grande connaissance et un long usage
« de l'analyse trigonométrique, et nous croyons qu'il est digne
« d'être approuvé par l'Académie. »

Traduction de l'Almageste de Ptolémée, par M. Halma.

« Les deux traductions de l'Almageste, ce vaste dépôt de toutes
« les connaissances des anciens en astronomie, étaient presque
« illisibles; on voit trop qu'elles n'ont pas été faites par des ma-
« thématiciens. Aujourd'hui, pour étudier Ptolémée, pour le
« consulter, pour y chercher tous les détails d'une observation
« ancienne qu'on aurait quelque intérêt de calculer de nouveau,
« on ne rencontrera plus que les difficultés inhérentes au sujet...

« On n'a rien négligé pour la facilité du lecteur; le caractère est « plus net, les lignes moins serrées; on en a banni les abrévia- « tions et ces ligatures souvent plus longues, et toujours moins « certaines que les syllabes qu'elles remplacent, et qui sont les « inventions de copistes sans goût. Dans l'édition de Basle, le « texte ainsi resserré, n'occupe que 320 pages; dans l'édition « nouvelle, il est étendu à près de 900 pages. De fréquens *alinea* « reposent la vue, et facilitent les recherches. Pour sentir à cet « égard tous les avantages de la nouvelle édition, il faut avoir fait « un long usage de l'ancienne. Quand on considère tous les soins « que le traducteur s'est donnés pour épurer le texte, par la « comparaison de tant de manuscrits, d'une lecture extrêmement « difficile, pour être toujours fidèle à son original, même quand « il cherche à dissimuler l'embarras de ses longues explications; « quand on songe aux sacrifices de tout genre qu'il s'est imposés « pour cette édition, on est forcé de convenir que M. Halma a « les droits les plus certains, non-seulement à l'estime des savans « et aux récompenses dont ils pourraient disposer, mais à tous « les encouragemens qui lui seraient nécessaires pour terminer « son utile et laborieuse entreprise. »

On sait que M. Halma a fait un travail semblable sur Théon, Géminus, et tous les astronomes anciens. (M. Delambre, rapporteur.)

Euclide grec, latin et français, de M. PEYRARD, *tome II; Commissaires, MM.* Laplace, Legendre, Prony, *et* Delambre, *rapporteur.*

A l'occasion du premier volume, qui a paru il y a environ deux ans, nous avons suffisamment expliqué ce qui distingue cette édition des précédentes, et les ressources que l'éditeur a trouvées pour en épurer le texte. Rien n'est changé à cet égard,

puisque le manuscrit, n° 190, de la bibliothèque du Vatican, le plus correct et le plus important de tous, n'est pas encore sorti des mains de M. Peyrard, et ne sera rendu qu'après la publication entière de l'ouvrage.

Le second volume contient les livres VIII et IX, qui traitent des nombres, et le dixième, où l'on trouve la doctrine des incommensurables démontrée à la manière des anciens. Ces livres sont généralement peu connus; les éditeurs, pour la plupart, les ont supprimés. Le plus considérable de ces trois livres, c'est-à-dire le dixième, est sur-tout regardé comme superflu et comme très-difficile à entendre.

Il semble à M. Peyrard que ces deux reproches sont mal fondés; il trouve dans ce livre un grand nombre de propositions utiles aux géomètres, et une foule d'autres qui sont dignes de leur admiration. Cette assertion, quoique un peu exagérée, ne peut paraître surprenante de la part d'un éditeur, et, à quelques égards, elle peut se soutenir par des raisons plausibles. M. Peyrard aurait pu l'étayer de plusieurs témoignages, et particulièrement de celui de Simon Stévin, mathématicien, célèbre en son temps, et qui avait fait une étude particulière de ce dixième livre. Mais, quoique ce savant professe à-peu-près la même opinion que le nouveau traducteur, sa manière de voir et de sentir est cependant beaucoup plus différente qu'elle ne paraît d'abord. Du temps de Stévin les avis étaient fort partagés, et voici ce que nous lisons dans son livre, dont nous rapporterons fidèlement les expressions.

« Après que nous avions veu et reveu le dixième livre d'Euclide, « traitant des incommensurables grandeurs, aussi lu et relu plu« sieurs commentateurs sur le même, desquels aucuns le jugeaient « pour la plus profonde et la plus incompréhensible de la ma« thématique; les autres que ce sont propositions trop obscures « et la *croix des mathématiciens;* et qu'outre cela, je me per-

« suadais d'entendre cette matière par ses causes, et qu'elle n'a « en soi telles difficultés comme l'on estime vulgairement, je me « suis adonné d'en décrire ce traité.... Mais veu que cette affaire « est facile et sans difficulté aux experts en la nature des nombres « radicaux .... sans laquelle on se tourmente en vain en cette « matière, il reste encore de dire quelle est la cause de l'obscu- « rité dudit dixième livre. Il faut donc savoir que les inventeurs « de ces propositions se proposaient nombres binomiaux, et par « les qualités qu'ils y découvraient.... ils ont décrit des lignes « de semblables qualités.... et en ont exposé diverses propo- « sitions.... mais ils en ont détenu les nombres qui leur avaient « été guide assuré pour comprendre parfaitement la propriété « d'icelles lignes, sans lesquels nombres ils ne pouvaient rien « effectuer, et nous ont ainsi laissé ces lignes imparfaites.... « de sorte qu'il leur était beaucoup plus facile d'inventer et de « descrire ces lignes, qu'à autres entendre leurs propositions.... « Par quoy les mathématiciens semblent aucunement avoir leurs « raisons, confessant ne leur pouvoir animadvertir aucune uti- « lité.... veu que l'on n'y traite point absolument, mais le tout « par manière d'obscurs énigmes, et cela à cause (comme nous « avons dit) que les inséparables nombres ne leur sont pas « adjoints. »

Stévin trouve donc facile et clair tout ce qu'on regarde communément comme obscur et inintelligible; mais c'est en refondant toute la doctrine, en lui donnant d'autres bases, et en la ramenant à une douzaine de formules extrêmement simples, dont il cherche les racines quarrées, qui lui fournissent des solutions faciles de toutes les questions, en assez petit nombre, auxquelles cette théorie se trouve applicable.

Clavius, commentateur d'Euclide, un peu plus ancien que Stévin, se rapproche bien plus de l'opinion de M. Peyrard. Il suit pas à pas la marche de son auteur, il n'ajoute que peu de

développemens, rejette expressément les expressions numériques, sans lesquelles Stévin prétend qu'on ne peut rien faire; dans ses notes peu nombreuses, il témoigne plus d'une fois sa profonde admiration pour les démonstrations d'Euclide, et l'on ne peut pas dire qu'il ait tout-à-fait tort.

En effet supposez que le lecteur ait pu se loger dans la mémoire, et d'une manière imperturbable, une vingtaine de définitions longues et compliquées de termes nouveaux et presque tous fort étranges pour le moins, qu'il soit parvenu à ne se tromper jamais sur le sens exact et précis de toutes ces dénominations, alors toute difficulté disparaît, la marche des démonstrations paraîtra simple et claire; cette marche est en effet assez uniforme, presque toutes reposent sur la même construction, et cette construction est du genre le plus simple. Les premiers mots de chaque phrase en font le plus souvent deviner le reste, et l'on arrive à la conclusion définitive par une route qui ne paraît ni bien longue ni bien pénible; mais on n'en verra guères mieux le but où l'on tend, ni les applications dont les 117 propositions du livre sont susceptibles. Euclide et Clavius n'en disent pas un seul mot; et d'ailleurs l'effort de mémoire que cette lecture exige nous paraît au moins fort difficile, s'il n'est absolument impossible.

La marche de Stévin est incontestablement plus lumineuse; il commence par réduire en formules douze des définitions d'Euclide; ces douze formules sont binomiales, et renferment toutes un radical et quelquefois deux. On peut les réduire à six en donnant au plus petit terme le double signe $\pm$. On peut les réduire en une seule en mettant des lettres au lieu des nombres, soit entiers, soit fractionnaires, soit rationnels, soit radicaux, employés par Stévin. Ces nombres, au reste, sont les plus simples qu'on puisse desirer; ces nombres sont 2, 3, et les racines quarrées de 2, 3, 5, 7, et 10. Il reste pour la solution des pro-

blêmes à prendre la racine quarrée des douze expressions; et, dans tous les cas, la solution se réduit en dernière analyse à résoudre ou construire des équations du second degré.

Par ce moyen bien simple, les propositions les plus abstraites et les plus longues se réduisent à de simples énoncés évidens par eux-mêmes, les démonstrations s'abrégent ou deviennent inutiles; on peut supprimer le plus grand nombre de ces propositions, qui ne servent qu'à démontrer le petit nombre de théorêmes vraiment utiles.

Avant Stévin, un autre commentateur d'Euclide, au témoignage de Clavius, avait démontré numériquement toutes les propositions d'Euclide. Ce commentateur se nommait Michel Stifelius; il jouissait de quelque réputation, et la perdit pour avoir annoncé la fin du monde pour l'année 1559; il ne mourut que huit ans après l'époque qu'il prétendait devoir être si fatale. Au reste, Clavius paraît fort satisfait de ses démonstrations, puisqu'il les donne comme un des motifs qu'il allègue pour réprouver la substitution des signes algébriques aux signes des anciens. Son second motif, c'est que l'algèbre était encore une science peu répandue, qui, par son obscurité naturelle, ajouterait de nouvelles difficultés à celles du sujet. Aujourd'hui que l'algèbre est simplifiée et généralement connue, qu'elle a été appliquée à la géométrie avec le plus grand succès, les raisons de Clavius, qui pouvaient être fort bonnes pour son temps, ne lui paraîtraient plus aussi fortes, et sans doute il n'oserait les reproduire. Quoi qu'il en soit, ce serait une chose assez curieuse que le rapprochement des méthodes de Stifelius, de Stévin, et de l'algèbre moderne, et la comparaison qu'on en ferait avec les procédés d'Euclide; si ce parallèle n'ajoutait rien aux connaissances actuelles, il serait du moins fort intéressant pour l'histoire de la science et celle des progrès de l'esprit humain.

Stévin a commencé ce travail, il en a tracé le plan; il range

en trois classes les 118 propositions qui, suivant l'édition de Zamberti, composent le dixième livre.

Dans la première, sont rangées trente propositions qui servent uniquement de préparation aux douze formules par lesquelles il a représenté les définitions d'Euclide; de cette manière, il nous dit *qu'elles sont manifestes, et la plupart d'icelles consistent en communes sentences*, dont l'énoncé porte avec lui sa démonstration.

A côté de chacune de ses formules, il place les termes dont Euclide s'est servi pour l'exprimer, et ce rapprochement soulage au moins la mémoire.

Dans la seconde, il réunit les problèmes qui servent aux constructions des douze binomes et à celles de leurs racines.

La troisième, enfin, comprend 71 propositions qui expriment les propriétés des douze formules, suivant les combinaisons qu'elles offrent entre les nombres rationnels et les radicaux.

Il ne fait qu'indiquer cet ordre, et il s'excuse d'entrer dans de plus longs détails, par la raison que dans son arithmétique il a donné des solutions plus faciles encore et plus générales.

Ce travail, simplement indiqué par Stévin, a été exécuté d'une manière un peu différente par un anonyme, dont l'ouvrage a paru à Paris en 1640, sous ce titre:

Traité des grandeurs incommensurables, où sont décidées plusieurs belles questions des nombres rationaux et irrationaux; les erreurs de Stévin réfutées, et le dixième livre d'Euclide illustré de nouvelles démonstrations plus faciles et plus succinctes que les ordinaires, et réduit à 62 propositions.

Cette annonce a piqué notre curiosité, car nous avouerons que, sans refaire les calculs de Stévin, et sans les étendre aux 118 propositions d'Euclide, nous avions pensé qu'il avait parfaitement raison. Nous avons donc scrupuleusement examiné

toutes les critiques de l'anonyme, et nous avons vu avec plaisir qu'elles ne portent que sur la partie métaphysique du traité de Stévin, métaphysique que nous n'avons aucune envie de défendre, et sur laquelle on pourrait sans inconvénient donner gain de cause à l'anonyme. Il pourrait bien s'être trompé pourtant quand il a soutenu, contre l'idée de Stévin, que les géomètres grecs n'avaient été nullement guidés dans leurs recherches par la considération des nombres et des radicaux, et qu'ainsi on ne peut leur reprocher d'avoir supprimé ces nombres, dont réellement ils n'auraient fait aucun usage; mais quoique nous soyons bien tentés de donner la préférence à l'opinion de Stévin sur celle de l'anonyme, comme nous n'avons pas plus que lui de raisons positives à produire à l'appui de notre conjecture, nous ne nous arrèterons pas à discuter cette question (1).

---

(1) Nous disons qu'il nous serait difficile de donner des raisons positives pour prouver que les Grecs ont formé leurs lignes d'après les considération des nombres; mais nous avons au moins de fortes probabilités. Les lignes se divisent en deux ordres; elles sont, ou ne sont pas, entre elles *comme nombre à nombre*, Euclide n'en considère pas d'autres. Quoi de plus naturel, en ce cas, que d'exprimer les unes par des nombres, et les autres par des radicaux. Mais le signe radical manquait à la géométrie des Grecs. Cette notation eût tout simplifié. Nous pourrions encore argumenter des expressions d'Euclide; il appelle ῥητὴ *dicible*, *exprimable* la ligne que les traducteurs désignent moins exactement par le mot *rationnelle;* il appelle ῥητὸν un rectangle qui peut s'exprimer par des nombres; n'est-il pas évident qu'en définissant ses lignes, par-tout il songeait aux nombres. Mais pour donner des théorêmes plus généraux il a exprimé ses nombres par des lignes. Que ne les exprimait-il par des lettres? Cette idée aurait pu le conduire à la découverte de l'algèbre. Mais les lettres grecques servaient déja à l'arithmétique, il aurait fallu inventer d'autres caractères pour l'algèbre et c'est peut-être ce qui a empèché les Grecs de faire cette importaute découverte.

L'anonyme avoue lui-même que la vérité des théorèmes qui se rapportent aux *congruentes* se reconnait bien plus facilement en nombres qu'en lignes, et il donne de ces *congruentes* une idée beaucoup plus nette que celle qu'on peut recueillir des expressions d'Euclide, qui emploie ce terme sans le définir.

Nous dirons seulement que le parti pris par l'anonyme, de refondre en entier le livre d'Euclide, d'intervertir l'ordre des propositions, d'en changer souvent l'énoncé qu'il trouve obscur, faux, ou du moins équivoque; enfin de ne conserver aucune des démonstrations de l'auteur grec, que ce parti extrême nous paraît la critique la plus sévère qu'on ait jamais faite de l'ouvrage. Nous ajouterons encore que le soin mis par l'anonyme à éclaircir toutes ses démonstrations par des exemples numériques, après avoir soutenu contre Stévin l'inutilité des nombres, pourrait être regardé comme une espèce de contradiction, ou du moins comme une concession assez importante qu'il fait à son adversaire. Nous ne dirons rien de l'amertume ni du ton de supériorité et de mépris avec lequel il traite un mathématicien qui a laissé un nom, et dont Lagrange a parlé d'une manière fort honorable. Au reste, l'anonyme ne fait aucun usage de l'algèbre, mais son ouvrage fait sentir à chaque pas l'avantage qu'aurait la notation algébrique sur les constructions qu'il emploie, et même sur les nombres qu'il donne pour exemples; car s'il a pu réduire à 62 les 118 propositions d'Euclide, l'algèbre pourrait bien réduire les siennes à une douzaine, ce qui serait encore beaucoup si l'on voulait ne conserver que ce qui serait indispensable.

Mais laissons cet examen tout-à-fait étranger à la nouvelle traduction, dont nous avons à rendre compte, revenons au travail de M. Peyrard, qui n'a pris aucun parti dans cette dispute. Il n'a promis qu'un texte pur et une double traduction; et pour rendre plus sensible l'ordre qui règne dans ce livre et l'enchaînement des parties qui le composent, il se borne, dans sa préface, à rassembler en un tableau l'énoncé des 117 propositions et les définitions qui sont de trois ordres, dont chacun suppose la connaissance de l'ordre précédent. Les premières sont fort simples et universellement connues. Les secondes arrivent après

la 48e proposition. On y voit des lignes de *deux noms* de six espèces différentes, ce sont les six premiers binomes de Stévin. Les deux termes y sont positifs. Dans le troisième ordre, qui vient après la 85e proposition, le second terme est négatif, la ligne alors s'appelle *apotome*, nom que l'anonyme change en celui de *résidu*. Il y en a de même de six espèces, qui sont les six derniers binomes de Stévin. On y voit des lignes *congruentes* et non *congruentes*, et d'autres noms plus bizarres, sur quoi nous ferons une observation grammaticale.

La *congruente* se nomme en grec προσαρμόζουσα, *quæ convenit*, *quæ congruit*, ligne *qui convient à une autre ligne, et qui, en s'y ajoutant, remplit certaines conditions*. Quand le verbe est à la troisième personne, le traducteur met indifféremment en latin *convenit* ou *congruit*, en français il met toujours *convient* et jamais *congrue*, qui pourrait faire équivoque. Quand il est au participe il met toujours *congruente*, en sorte que la même idée est exprimée successivement par deux mots différens, sans que rien avertisse qu'ils sont synonymes; il en résulte une espèce d'obscurité qui n'existe pas dans le grec, et qui cesse dès qu'on a recours à l'original. Une note à ce sujet ne serait pas superflue pour nombre de lecteurs. L'anonyme, en ce cas, nomme toujours cette ligne *convenante*.

C'est dans le dixième livre sur-tout qu'on rencontre les variantes en grand nombre. Une foule de superfluités s'y étaient introduites, l'éditeur les en a fait disparaître; il aurait pu étendre plus loin la réforme, et nous sommes en ce point entièrement de son avis; mais comme cette manière de voir ne serait peut-être pas celle de tout le monde, il a donné comme variante tout ce qu'il a éliminé du texte. Parmi les lemmes et les scholies rejetés à la fin du volume, il en est plusieurs qu'il est impossible d'attribuer à Euclide, qui s'y trouve nommé à la troisième personne. Nous avons fait nous-mêmes une remarque semblable

sur l'optique du même auteur, qui, dans l'état où elle se trouve aujourd'hui dans l'édition d'Oxford, ne peut passer tout au plus que pour un extrait de l'ouvrage d'Euclide, fait par quelque mathématicien mal habile, qui y a fait entrer des théorèmes faux et des démonstrations fausses de théorèmes vrais.

M. Peyrard termine sa préface par des réflexions nouvelles sur quelques propositions du premier volume, qui étaient altérées dans les éditions précédentes, et qu'il a rétablies dans leur pureté primitive, à l'aide des manuscrits.

Une des principales richesses de la nouvelle édition est cette foule de variantes recueillies avec soin en douze manuscrits différens. Le second volume en offre à lui seul quatre-vingt-seize pages. Toutes ne peuvent être de la même valeur; quelques-unes paraissent assez indifférentes. D'autres sont des fautes qu'on a bannies du texte; d'autres l'allongeraient inutilement et le rendraient plus obscur. Il en est dont l'adoption a été indispensable, sans quoi le lecteur se serait vu arrêté, et n'aurait pu suivre une démonstration qui par elle-même présente encore assez d'obscurité.

Une autre richesse est le texte en trois langues qui donne au lecteur une triple sûreté; car il serait bien difficile qu'une même faute se trouvât dans toutes; et si malgré les soins, soit de l'éditeur, soit des personnes qui ont bien voulu le seconder dans le travail fastidieux de la révision des épreuves, quelque erreur avait échappé à tant de regards attentifs, il suffirait de confronter les textes. Une connaissance parfaite dn grec n'est pas même nécessaire. Ce qui importe sur-tout, c'est d'avoir correctement les lignes et les lettres qui entrent dans la démonstration; et les caractères qui les désignent étant les mêmes dans le texte et dans les deux traductions, un coup-d'œil suffirait pour reconnaitre l'erreur.

Nous avons d'un bout à l'autre comparé le français à l'ori-

ginal grec, et par-fois à la traduction latine, sans rien remarquer qui puisse être l'objet d'une critique fondée. On peut donc se borner à la traduction française, qui, n'admettant aucune de ces inversions qui étaient dans le génie des langues grecque et latine, est par-là même plus favorable à la clarté des démonstrations qu'on y voit se développer dans l'ordre le plus naturel.

Quoique le style d'Euclide, qui écrivait dans le dialecte commun, soit plus simple et moins rempli de grands mots que celui d'Archimède qui suivait le dialecte dorique, nous ne balancerons pas à dire de la nouvelle traduction ce que nous avons dit de celle d'Archimède : la lecture en français en sera toujours plus facile que dans l'original, auquel on n'aura jamais besoin de recourir que dans le cas où une proposition n'étant pas facile à comprendre, on voudrait s'assurer qu'en effet elle a été fidèlement rendue. Or nous croyons que dans tous les cas on peut avoir toute confiance au traducteur.

On ne s'attend pas que nous entrions dans aucun détail sur les changemens que M. Peyrard a faits aux textes d'Oxford et de Bâle. Une semblable discussion serait ici bien inutile. Nous pensons que le second volume mérite de paraître avec l'approbation de l'Académie, comme le premier; qu'il doit faire desirer la publication du troisième qui aura lieu dans quelques mois; et et nous exprimerons le vœu que ce travail si long et si peu attrayant puisse valoir à son auteur les encouragemens qui le mettraient en état de livrer bientôt à l'impression son Apollonius dont nous avons eu entre les mains la traduction complète, suivie de variantes recueillies de même en divers manuscrits. Nous remarquerons enfin qu'on doit lui savoir d'autant plus de gré de son Euclide, que sans lui l'édition n'aurait jamais été entreprise, au moins en France, où il n'eût été possible de la donner ni plutôt ni plus tard.

COMÈTE DE 1815.

La comète découverte, le 5 mars 1815, par M. Olbers, est devenue bien intéressante pour les astronomes, depuis qu'on est parvenu à déterminer, avec une grande probabilité, le temps de sa révolution périodique, et l'époque à laquelle il est permis de croire qu'elle pourra reparaître.

MM. de Lindenau, Nicolaï et Bessel, sont les premiers qui en aient calculé l'orbite elliptique, et qui nous aient appris que la comète doit revenir dans soixante-treize ans.

M. Bessel, dans l'intention d'ajouter à la probabilité de ce résultat singulier, a publié récemment un Mémoire auquel l'Académie des Sciences vient d'adjuger la médaille fondée par Lalande; il y a rassemblé 187 observations faites en différentes parties de l'Allemagne et de l'Italie. De cette nombreuse série, qui commence au 6 mars et finit au 25 août, il a déduit de nouveaux élémens elliptiques, que l'on doit croire fort approchans de la vérité.

Les astronomes de Paris, instruits beaucoup plus tard de l'apparition du nouvel astre, contrariés d'ailleurs par les mauvais temps, et distraits par les événemens qui ont signalé cette époque, n'ont pu réunir que 29 observations, du 29 mars au 29 juin.

C'est avec ce nombre médiocre d'observations que M. Nicollet a tenté de calculer à son tour les élémens elliptiques de la comète. Sans se prévaloir en rien de ce qu'avaient déja trouvé les astronomes distingués que nous avons nommés ci-dessus, et sur un intervalle de temps moindre de 80 jours, par des observations toutes différentes, il est parvenu aux élémens qui suivent, et qui diffèrent très-peu de ceux qu'a trouvés M. Bessel.

Passage au périhélie, 1815, avril, 26.54857 temps moyen compté de minuit, à Paris.

Longitude du périhélie sur l'orbite..	149°.2'.58"
Inclinaison de l'orbite............	44.30.45
Longitude du nœud ascendant.....	83.26.50
Excentricité......................	0.9305435
Distance périhélie................	1.213090
Demi-grand axe....................	17.46550
Révolution sidérale, ans...........	72.99110
Mouvement direct.	

Ainsi, la révolution est de trois ans environ moindre que celle de la célèbre comète qui est revenue en 1759, suivant la prédiction de Halley; son demi-grand axe est un peu moindre; il s'en faut à-peu-près d'un diamètre de l'orbite de la terre que ce demi-grand axe égale celui de la planète Uranus, qui ne fait sa révolution qu'en 84 ans. Mais la comète, dans sa plus grande distance au soleil, en est éloignée d'une quantité presque double, c'est-à-dire de 35 fois environ la distance moyenne de la terre au soleil. Halley mourut à 86 ans, 17 ans avant le retour de sa comète. Les astronomes qui ont calculé l'orbite nouvelle, n'ont guères plus de chances pour voir l'accomplissement de leur prédiction.

NOTICE

SUR LA VIE ET LES OUVRAGES

DE M. LE COMTE DE FLEURIEU,

PAR M. le Ch^er DELAMBRE, Secrétaire Perpétuel.

Lue dans la Séance publique de la Classe des Sciences, le 6 janvier 1812.

CHARLES-PIERRE CLARET DE FLEURIEU, ancien capitaine de vaisseau, sénateur, grand officier de la légion-d'Honneur, membre de l'Institut et du Bureau des longitudes, était né à Lyon le 2 juillet 1738, d'une famille considérée et d'un père qui avait occupé en cette ville des places distinguées dans l'administration et la magistrature.

Il était le dernier de neuf enfans qui vivaient tous alors, et par cette raison, ses parens le destinaient à l'état ecclésiastique. Le goût qu'il manifestait déja pour l'étude pouvait leur faire espérer qu'il céderait facilement à leurs desirs; mais le genre de vie et de connaissances auxquelles il se sentait porté plus particulièrement lui donna, malgré la douceur de son caractère, le courage d'opposer une résistance invincible aux idées de sa famille. Ses parens étaient loin de vouloir abuser de leur autorité, puisqu'à l'âge de 13 ans ils lui ouvrirent la carrière où il se sentait l'envie et les moyens de se distinguer. Il entra dans le corps de la marine, et fit la guerre de sept ans.

La paix de 1763 lui permit de se livrer avec plus d'assiduité aux travaux qui ont pour objet le perfectionnement de la navigation.

Le problème des longitudes occupait les savans et les artistes de la France et des pays étrangers. Lacaille, dans un voyage au cap de Bonne-Espérance, avait éprouvé la méthode des distances de la lune au soleil et aux étoiles, et à son retour, il avait proposé la forme d'almanach nautique, adoptée aujourd'hui par toutes les nations qui ont des astronomes et une marine. Lemonnier et Pingré cherchaient à accréditer la méthode des angles horaires; Maskelyne appuyait de son expérience et de son crédit le plan proposé par Lacaille; Mayer venait de publier ses premières tables lunaires, et travaillait à celles qui lui valurent un prix de 62000 fr., c'est-à-dire la moitié de la somme promise par unacte du parlement d'Angleterre; Euler, Clairault, d'Alembert, travaillaient à perfectionner la théorie des mouvemens de la lune; Harrison, Berthoud et Le Roi s'appliquaient à trouver par l'horlogerie une solution du problème qui fût plus à la portée du commun des navigateurs, en les dispensant de la partie la plus longue et la plus difficile, c'est-à-dire des observations et sur-tout du calcul.

Dans cette fermentation générale des esprits, M. de Fleurieu ne pouvait rester indifférent sur un objet qui intéressait aussi essentiellement l'art auquel il s'était spécialement consacré. Son goût le portait vers la mécanique plus que vers l'analyse ou le calcul; il dirigea ses pensées vers les secours que la navigation pouvait espérer de l'horlogerie, et il avait conçu l'idée d'une montre marine.

Ses projets étaient connus de M. le duc de Choiseuil, qui, appréciant son mérite et son zèle, le fit venir à Paris pour qu'il pût y suivre et mûrir ses idées, en acquérant les connaissances pratiques sans lesquelles ses efforts ne pouvaient être qu'infructueux. F. Berthoud l'admit dans son atelier, le forma dans l'exercice de son art, lui fit confidence de ses inventions, et n'eut pour lui aucun secret.

M. de Fleurieu, ne dédaignant aucune partie de l'art, mit tous ses soins à profiter des leçons d'un maître si habile; il travailla de ses propres mains toutes les pièces d'une pendule à secondes qui pendant quarante ans n'a rien perdu de sa régularité, dont il a suivi la marche jusqu'à ses derniers momens, et qui est encore entre les mains de madame de Fleurieu.

Confident de toutes les pensées et de tous les essais de F. Berthoud, il paya sa confiance en se déclarant hautement le partisan de ses inventions, en leur donnant la préférence sur celle dont lui-même avait conçu l'idée, en proposant au gouvernement d'en ordonner l'épreuve, dans un voyage dont il avait tracé le plan, et dont l'exécution lui fut confiée.

Pour mettre dans tout son jour l'importance de la découverte qu'il était chargé de soumettre aux épreuves les plus rigoureuses, et pour forcer dans ses derniers retranchemens l'incrédulité que devait rencontrer une tentative aussi nouvelle, M. de Fleurieu sentit le besoin de s'associer un astronome dont le mérite et la candeur fussent universellement reconnus. Il obtint de M. Pingré qu'il voulût bien se charger de faire concurremment avec lui toutes les opérations astronomiques. Ces doubles observations se faisaient toujours en présence des officiers du vaisseau, qui en dressaient procès-verbal; les deux horloges étaient enfermées sous trois clefs, pour qu'il fût bien constaté que jamais on n'y avait touché qu'une fois par jour, et seulement pour les remonter.

Tous les procès-verbaux ont été publiés sans aucune suppression, et si l'on y aperçoit entre les résultats des deux astronomes quelques différences un peu fortes dans des opérations usuelles et fondamentales, auxquelles l'opinion générale accorde un degré plus haut de précision, ces différences sont au moins trop légères pour avoir pu affecter les conclusions qu'on a dû en tirer, et elles n'ont eu d'autre effet que d'attester la véracité et la bonne foi qui ont présidé à cette publication, ainsi qu'à tout le reste de l'entreprise.

Nous ne suivrons pas M. de Fleurieu dans tous les détails de cette longue navigation. Il nous suffira de dire que jamais épreuve n'avait été mieux entendue, plus diversifiée, plus prolongée, plus authentique, ni enfin plus satisfaisante.

Tant d'observations, suivies de tant de calculs, ne font pourtant qu'une partie du travail que s'était imposé M. de Fleurieu. Il ne lui suffisait pas de constater de la manière la plus certaine le mérite et l'utilité de l'invention, s'il n'en tirait par la même occasion toutes les sortes d'avantages qu'elle promet.

Ainsi, non content de démontrer, par les observations faites dans toutes les relâches dont la position géographique était bien connue d'avance, que les horloges avaient conservé dans les différentes traversées toute la régularité qu'on en attendait, et beaucoup plus encore, après avoir montré dans quelles limites et avec quelle précision il avait toujours connu la longitude de son vaisseau, il se sert de cette connaissance pour rectifier, chemin faisant, les longitudes de tous les points peu ou mal connus qu'il a pu voir et relever dans sa route.

Sans cesse il compare le résultat de ses observations aux résultats incertains de l'épreuve des pilotes, dont il fait sentir tous les dangers, quand on s'y livre uniquement et avec trop de confiance. Il recherche les causes qui ont pu occasionner les erreurs de ces pratiques trop simples et trop faciles en elles-mêmes pour donner lieu à des mécomptes si étranges, si quelque circonstance inconnue ou négligée n'y introduisait des altérations continuelles; il détermine ainsi l'effet des courans; il rectifie les cartes marines, signale tous les dangers, et n'omet rien de ce qui peut être utile aux navigateurs qui auront à suivre les mêmes routes. Le simple passager n'a pour but que de changer de lieu; il ne voit que deux événemens dans une longue traversée quand elle est heureuse, l'embarquement et l'entrée au port. Tout l'intervalle est pour lui presque nul; rien ne rompt l'uniformité des

jours; il se trouverait souvent heureux de rencontrer le danger pour échapper à l'ennui, tandis que le marin, qui aime son métier et qui en connaît les ressources, n'a pas un moment dont il ne puisse faire un emploi utile et amusant.

C'est ainsi que M. de Fleurieu sut remplir les deux années que demanda cette expédition. Mais, quoiqu'il n'eût à se reprocher la perte d'aucun des instans qu'il avait passés en mer, on ne peut être étonné de ce que le travail de la rédaction, le soin de mettre en ordre tant de matériaux divers, ceux de la gravure et de l'impression, l'aient encore occupé à Paris pendant trois ans, et qu'il n'ait pu faire paraître qu'en 1773 son ouvrage accompagné de toutes les cartes qu'il avait ou dressées ou rectifiées d'après ses propres observations.

Si M. de Fleurieu, rentré dans ses foyers, n'en sortit presque plus, en accuserons-nous son inconstance ou l'incurie du gouvernement? Croyons plutôt, et la suite va nous le prouver, que son zèle avait pris une nouvelle direction.

Il connaissait les marins français; il savait qu'on trouverait toujours parmi eux nombre d'officiers assez instruits, assez amis de leur profession pour tenir dans leurs voyages des journaux instructifs de toutes les opérations qu'auraient commandées le soin de leur sûreté, le desir d'abréger une traversée, et sur-tout de remplir avec éclat et célérité leurs missions importantes; mais il savait aussi qu'accoutumés à une vie active et entourée de périls, le repos du cabinet les effraie, qu'ils ont sur-tout pour les froids et longs calculs une répugnance presque invincible, et qu'ainsi leurs journaux à leur retour courent le risque d'être ensevelis dans la poussière des dépôts, où ils ne trouveront pas toujours des mains assez habiles et assez laborieuses pour en tirer tout le parti possible. Il voulut donc se consacrer à ce genre de travail que trop peu de marins sauraient ou voudraient s'im-

poser. Au lieu d'entreprendre lui-même de nouveaux voyages, il se voua au soin de tirer des grands voyages exécutés toutes les conséquences qu'on avait négligé d'en déduire. Dans cette vue, et pour remplir sans distraction un plan si vaste que la vie la plus longue pouvait à peine y suffire, il demanda avec instance sa démission du grade d'officier de la marine. Mais le gouvernement, trop éclairé pour ne pas sentir de quelle utilité pouvait être un homme dans la force de l'âge, et à qui aucune des parties de la marine n'était étrangère, créa pour le retenir une place de directeur-général des ports et de leurs arsenaux. Ses nouvelles fonctions ne devaient pas exiger de longs déplacemens; il pouvait dans les intervalles se livrer à son goût pour l'histoire raisonnée de la navigation, et à la discussion des problèmes nombreux et difficiles qu'elle offrait à résoudre. Dans cette vue, il cherchait à s'entourer de tous les moyens qui lui devenaient si nécessaires. Un de nos géographes les plus habiles lui forma une riche collection de toutes les cartes et de tous les ouvrages qui ont pour objet plus ou moins direct la géographie et la navigation.

Cette collection était unique en son genre : pour la composer, il n'avait rien épargné. Il eut dans la suite la douleur de se voir, par des circonstances impérieuses, contraint d'en faire le sacrifice; mais avant même ces temps de malheur et de proscription, il avait pu bien rarement en faire l'usage auquel il l'avait destinée.

Honoré constamment de la confiance des ministres qui se succédèrent dans le département de la marine, sans cesse il se voyait détourné de ses occupations chéries. Continuellement occupé des détails d'une administration dont il était l'ame toujours invisible, malgré la modestie avec laquelle il se résignait à être obscurément utile, la voix publique lui faisait honneur des

efforts heureux par lesquels notre marine se relevait de la décadence où l'avait d'abord fait tomber une longue insouciance, et bientôt après replongée une guerre malheureuse.

Cette considération, que les hommes ne sont jamais assez injustes pour refuser à celui qui sans montrer aucune ambition se borne à être utile, était pour M. de Fleurieu la plus douce récompense, et le dédommageait du sacrifice continuel qu'il faisait de ses goûts et de son temps. S'il ne pouvait tenter de nouvelles découvertes, ou porter la lumière dans le cahos des découvertes anciennes, il pouvait diriger ceux que leur zèle et la confiance du souverain appelaient à d'honorables missions. Personne n'ignore aujourd'hui que M. de Fleurieu eut la plus grande part aux instructions données à l'infortuné La Peyrouse et au navigateur non moins malheureux qui fut chargé d'aller à sa recherche et de compléter les découvertes et les reconnaissances qu'il n'avait pu terminer.

La confiance publique, qu'il avait si bien méritée, l'appela au ministère dans ces temps de fermentation où l'inquiétude générale faisait souhaiter de voir en première ligne ceux que l'ancien ordre avait retenus dans des places secondaires. Mais ces mêmes troubles, qui les tiraient de leur paisible obscurité, rendaient bien dangereuse pour eux la justice tardive qui leur était rendue. Il fallait un dévouement bien généreux pour accepter des places où l'insubordination des agens réduisait à l'impuissance d'opérer aucun bien, en exposant au hasard de compromettre sa réputation ou de décréditer des plans et des mesures qui dans des temps plus calmes eussent été suivis des plus importans succès. Nommé au ministère de la marine, M. de Fleurieu n'osa se refuser à cette marque d'estime; mais animé d'une probité trop scrupuleuse pour consentir à se charger de fonctions qu'il n'aurait pas eu quelque espoir de remplir selon ses vœux, il insista pour que les colonies formassent un ministère à part.

On n'écouta pas d'abord ses réclamations; mais il les réitéra avec tant de constance, qu'on se vit forcé de confier à un autre un ministère qu'une loi toute récente défendait de diviser. Tous ceux qui travaillaient sous lui, et les officiers de la marine, M. d'Estaing à leur tête, vinrent en corps lui témoigner les regrets que leur causait sa retraite.

La fermeté avec laquelle il avait sollicité son remplacement n'empêcha pas que bientôt après il ne se vît honoré d'une nouvelle marque de confiance qui attestait bien l'estime qu'on faisait de son caractère et de ses principes.

Choisi pour gouverneur du prince royal, il eut à peine le temps de s'essayer à ces nouvelles fonctions, si différentes de celles auxquelles il avait jusque-là consacré tout son temps. Le renversement de la constitution à peine achevée lui ravit ce nouveau poste qui ne fit guère que lui donner un titre de plus pour grossir la liste de ces *suspects* si tranquilles qu'on entassait de toutes parts dans les prisons qui couvraient le sol de la France.

Là, pendant une détention de quatorze mois, il eut le loisir de méditer sur la fragilité des honneurs qu'il n'avait jamais recherchés, et de se fortifier dans l'opinion où il avait toujours été sur les dangers de tout grand mouvement politique. Madame de Fleurieu, dont il ne fut point séparé, lui prodiguait des consolations bien douces, si elles n'eussent été empoisonnées par les inquiétudes les plus vives sur le sort de ce qu'il avait de plus cher. Moins malheureux cependant que tant d'autres, les deux époux recouvrèrent la liberté, mais pour trouver, en rentrant dans leurs foyers, leur patrimoine dissipé, leur mobilier dispersé, et leurs ressources anéanties.

La première consolation de M. de Fleurieu fut d'être nommé à l'Institut; mais c'était dans sa position une ressource bien faible. Il n'avait pu être compris dans la première formation du bureau des longitudes : un ami généreux (M. Buache) voulut

lui en ouvrir l'entrée, en se démettant en sa faveur de la place de géographe à laquelle la nouvelle loi venait de le nommer.

Cette compagnie, formée de savans qui tous estimaient et desiraient M. de Fleurieu pour eux et pour lui-même, hésitait pourtant à l'acquérir à ce prix. Un des membres, nommé par la loi, navigateur célèbre, que la Classe vient de perdre récemment, se trouvait alors dans l'impossibilité de satisfaire au réglement qui exige la résidence. Les membres du bureau des longitudes, obligés d'accepter la démission de M. Bougainville, eurent du moins la consolation de le voir remplacé par celui qu'ils avaient regretté de ne pouvoir se donner pour confrère.

M. de Fleurieu dès ce moment fut libre de reprendre ses travaux suspendus. Il n'en fut presque pas distrait par sa nomination au conseil des anciens, où il ne siégea que peu de temps. Il avait entrepris la rédaction du voyage de Marchand; et déja il en avait lu des fragmens à la Classe des sciences morales et politiques de l'Institut.

Ce voyage, dont peu de personnes avaient connaissance, n'était point une de ces expéditions brillantes telles que celles des Anson et des Bougainville, dont le but était de tenter de nouvelles découvertes; mais, comme ces navigateurs distingués, Marchand avait heureusement fait le tour du globe; il avait découvert des îles inconnues; il avait contribué aux progrès de la géographie. L'objet de ce voyage n'était d'abord que de tenter la traite des pelleteries; mais ceux qui en avaient fait les frais (la maison Baux de Marseille), en donnant un exemple qui pouvait devenir utile au commerce français, étaient en même temps en état d'apprécier les connaissances que pouvait procurer une expédition si nouvelle. Ils avaient eu le bonheur de rencontrer deux capitaines d'un mérite réel, MM. Marchand et Chanal; ils s'en étaient rapportés à eux pour la construction du navire et tous les détails de l'armement. Le vaisseau construit tout exprès avait

reçu le nom du *Solide*, parce qu'on n'y avait rien épargné pour le mettre en état de résister aux fatigues de l'expédition mixte que Marchand projetait dès-lors de faire tourner à l'avantage de la géographie.

Les navigateurs n'avaient pas de montres marines qui auraient pu faciliter leurs opérations, mais qui malheureusement étaient encore trop rares dans nos ports; mais ils étaient l'un et l'autre exercés à toutes les opérations de l'astronomie nautique; ils étaient munis de sextans de réflexion bien rectifiés. Toutes les fois que le ciel était serein, ils mesuraient les distances de la lune au soleil et aux étoiles; ils les calculaient séparément, et se communiquaient ensuite leurs résultats pour la longitude du vaisseau; le capitaine Chanal les inscrivait sur son journal, sur lequel a travaillé M. de Fleurieu, car le capitaine Marchand était mort depuis en pays étranger, sans qu'on ait pu jusqu'ici découvrir ce que sont devenus ses papiers.

Dans le temps où il s'était consacré tout entier à l'épreuve des horloges de Berthoud, en se passionnant pour cette belle découverte mécanique, M. de Fleurieu n'avait pas manqué d'employer aussi les méthodes purement astronomiques, ne fût-ce que pour obtenir des vérifications plus nombreuses, et pour être en droit d'avoir son avis sur la bonté relative des diverses méthodes; mais il n'en avait parlé que pour déclarer qu'il ne manifesterait pas son opinion, s'il en avait une. Il est aisé pourtant de voir dans ce silence même que cette opinion était toute en faveur des horloges. On le voit encore par la manière sévère dont il traite un astronome distingué qu'il accuse de partialité contre Harrison. Il s'était pour ainsi dire identifié avec Berthoud, dont, sans le savoir, il partageait un peu les préventions. L'astronome respectable qui lui avait été adjoint pouvait bien lui-même n'être pas tout-à-fait libre de préjugés contre la méthode des distances, qui commençait à triompher de la méthode des angles

horaires pour laquelle il avait tant travaillé. Il est si difficile, même aux meilleurs esprits, de garder une impartialité bien parfaite entre deux procédés entièrement opposés, sur-tout quand les deux méthodes, étant encore dans leur enfance, laissent voir trop à découvert les imperfections qu'on peut leur reprocher, et dont rien ne démontrait encore que l'on dût un jour les corriger.

On peut donc supposer, sans commettre une injustice, que M. de Fleurieu n'avait pas senti tout le parti qu'on pouvait tirer des observations astronomiques. Il eut tout le loisir d'en voir les bons effets, en rédigeant un voyage où elles avaient été si constamment utiles. Il dut se féliciter alors de n'avoir pas émis une opinion qu'il eût été obligé de rétracter, ou qu'il n'aurait pu soutenir sans une injustice dont il était incapable. Il put, cette fois, manifester son opinion toute entière; il donne franchement à la méthode des distances tous les éloges qu'elle mérite, et distingue avec beaucoup de justesse les occasions où elle a incontestablement l'avantage de la sûreté et de la généralité, d'avec celles, au contraire, où les montres joignent au mérite de la facilité celui d'une plus grande exactitude; ce qui est incontestable, quand les différences de longitudes qu'il s'agit de déterminer n'excèdent guère les erreurs dont on ne peut répondre dans la méthode lunaire.

Le travail de M. de Fleurieu ne se borne pas à mettre en ordre les observations des capitaines Marchand et Chanal, à placer sur des cartes les îles qu'ils avaient découvertes et les lieux dont ils avaient mieux déterminé les positions. L'introduction qu'il mit en tête de l'ouvrage est une histoire intéressante des voyages entrepris par tous les navigateurs qui ont successivement visité la côte nord-ouest de l'Amérique, depuis Cortez jusqu'à Marchand; elle est encore une discussion profonde, un rappro-

chement de leurs diverses relations, qui les éclaircit, les confirme ou les corrige les unes par les autres.

L'histoire du voyage même est par-tout entremêlée de discussions pareilles où l'auteur éclaircit les points douteux et assure à chacun ce qui lui appartient. Mais l'article le plus utile et le plus curieux est celui où il met fin aux doutes des navigateurs sur la préférence à accorder à l'une des deux passes du détroit entre Banca et Billiton. Quoique plusieurs marins eussent déja pratiqué ces deux routes, connues sous les noms de Gaspard et de Clément, leurs cartes étaient peu répandues. Marchand n'avait avec lui que celle de Gaspard, contre laquelle ce qu'en avait dit d'Après devait même lui inspirer les plus fortes préventions. Marchand n'hésita pourtant point sur le choix; il s'engagea dans le détroit de Gaspard, qui lui était peint comme si dangereux; mais sa navigation est un modèle de prudence et des attentions que doit avoir tout marin qui est forcé de suivre une route inconnue et périlleuse. Tandis qu'il s'occupait de la conservation du vaisseau, Chanal faisait des observations continuelles pour déterminer d'après deux points principaux toutes les îles, les caps, les montagnes qu'il pouvait relever.

C'est d'après ces renseignemens dont il démontre l'exactitude, que M. de Fleurieu construit sa carte du détroit de Gaspard, et qu'il y trace la route du *Solide*, comme celle dont les navigateurs ne doivent plus s'écarter. Mais Chanal n'avait pu voir l'autre détroit, dont il était séparé par l'île qu'on a nommée du *Milieu;* le travail rédigé sur son journal ne pouvait être qu'incomplet. M. de Fleurieu y joint les routes de tous ceux qui ont passé l'un et l'autre détroit; il examine scrupuleusement leurs relations, et les corrigeant les unes par les autres, il forme du tout une description du double détroit qu'il ne donne pas encore comme parfaite, mais qui a reçu depuis la sanction des navigateurs qui ont tenu l'une et l'autre route, et qui ont témoigné leur étonne-

ment de ce que, sans sortir de son cabinet, un savant avait pu tracer une description plus exacte et plus sûre qu'aucune de celles qu'on devait aux marins qui avaient vu par eux-mêmes.

Après ce chapitre, digne d'être proposé pour modèle dans les recherches du même genre, on lit avec un intérêt d'une autre espèce, et fait pour être senti par un plus grand nombre de lecteurs, le chapitre qui termine l'ouvrage. L'auteur y donne ses réflexions sur la durée des voyages autour du monde, sur les moyens de les abréger, sur les méthodes les plus utiles à la navigation.

Ici, il était permis à M. de Fleurieu de regarder sa tâche comme finie : le desir d'être plus utile à tous les marins lui fit ajouter un volume.

Le capitaine Chanal avait soigneusement consigné dans son journal les points de la navigation où il avait commencé à voir divers oiseaux ou poissons. Ces remarques indiquent au navigateur le voisinage d'une terre en général; mais, pour tirer de ces observations un parti plus avantageux et plus précis, il faut des connaissances d'histoire naturelle, que M. de Fleurieu voulut rassembler pour l'usage du marin. Peut-être y cherchait-il pour lui-même un délassement; peut-être a-t-il un peu trop cédé à l'attrait qu'il trouvait à des descriptions qui pouvaient donner à son style plus de mouvement, de couleur et de variété. Il ne nous appartient pas de juger le fonds du travail, mais n'est-il pas à craindre que des détails trop étendus deviennent par-là même inutiles au marin, à qui il n'est guère permis de s'entourer d'un grand nombre de volumes.

Mais si M. de Fleurieu est sorti de son sujet, il ne tarde pas à y rentrer d'une manière fort heureuse, par ses recherches sur les terres de Drake et l'examen critique du voyage de Roggeween autour du monde. C'est là qu'il annonce en termes positifs le projet de reprendre successivement tous les voyages des

temps antérieurs, afin d'y porter la lumière que nous pouvons emprunter des navigations modernes; d'appliquer ensuite le résultat de chaque discussion particulière à la carte générale des découvertes modernes, pour connaître quelle place les anciennes y doivent occuper; de manière qu'en distinguant les vraies découvertes de ce qui n'est qu'une *reconnaissance nouvelle* de lieux antérieurement visités, nous puissions avoir une description du grand Océan entre l'Amérique et l'Asie, aussi exacte que le comportent les progrès de la navigation et la réunion des matériaux épars qui doivent en présenter l'ensemble. Dans toutes les recherches auxquelles il se livre ensuite, on voit briller la même critique, la même impartialité, qu'on avait applaudies dans un écrit qu'il avait publié, sans nom d'auteur, pendant son ministère, et qui porte pour titre *Découvertes des Français en* 1768 *et* 1769. Son but était alors de réclamer contre une espèce d'usurpation trop fréquente qui porte les navigateurs à imposer leurs propres noms ou ceux de leur pays à des terres déja découvertes et nommées par d'autres voyageurs, ce qui ne peut que jeter le trouble et l'incertitude dans l'histoire et la pratique de la navigation. Mais dans ce même ouvrage, entrepris pour assurer les droits de MM. de Bougainville et de Surville contre les prétentions ou les méprises de plusieurs Anglais, on voit avec plaisir l'impartialité avec laquelle il parle de Dalrymple, qui n'avait pas partagé l'injustice ou l'erreur de ses compatriotes, et les hommages qu'il rend au célèbre Cook, à qui il eût pu reprendre beaucoup plus encore sans l'appauvrir.

Le succès de cet ouvrage ne pouvait pas être douteux en France; il ne fut pas moindre en Angleterre, où M. de Fleurieu trouva un traducteur non moins impartial que lui-même, qui se chargea de répandre cet écrit parmi ses compatriotes, *pour faire*, comme il le déclare, *un sacrifice volontaire à la vérité*, et qui, dans ses notes comme dans sa préface, rend par-tout

justice aux *recherches fines et profondes des géographes français, et notamment à celles du savant et ingénieux auteur qu'il traduit.*

Le voyage de Marchand valut à M. de Fleurieu un témoignage non moins flatteur, parce qu'il était aussi désintéressé, de la part d'un Espagnol qui se plaignait pourtant de voir sa nation traitée par M. de Fleurieu avec une sévérité qu'elle cessait alors de mériter. Le savant espagnol n'hésitait pas à adopter la nouvelle nomenclature des terres et des mers proposée dans l'appendice au voyage de Marchand.

Pour donner à une science une nomenclature exacte, il faudrait au moins que les limites de cette science fussent bien posées, et ses grandes divisions parfaitement établies; et toutes les nomenclatures se sont introduites graduellement à mesure que les sciences se formaient, quand les idées étaient encore incomplètes, si même elles n'étaient entièrement inexactes. Peu de sciences ont à cet égard le droit de se faire l'une à l'autre un reproche qu'elles méritent presque toutes. L'astronomie, la plus ancienne et peut-être la plus avancée des connaissances humaines, offre des exemples continuels de dénominations qui ont plusieurs fois changé leurs acceptions, sans parvenir à en rencontrer de justes.

La chimie, presque seule jusqu'aujourd'hui, a cédé au besoin de se faire une nomenclature toute nouvelle.

M. de Fleurieu voulut rendre un service pareil à l'hydrographie. La réforme était plus facile. Le globe est aujourd'hui suffisamment connu, sinon dans tous ses détails, au moins dans son ensemble. On connaît à-peu-près les limites et les contours des pays ou des mers où l'on n'a pu pénétrer. Il était temps de faire disparaître ces dénominations imposées vaguement et au hasard à des mers dont on n'avait visité que la moindre partie. En démontrant l'inexactitude des dénominations qu'il veut bannir et

les motifs de celles qu'il veut y substituer, en se fondant partout sur la nature même ou sur la justice, il a proposé une nomenclature qui doit plaire également à toutes les nations dont elle assure les droits, puisqu'elle tend à rendre à toutes les îles et à toutes les terres les noms imposés par les navigateurs qui les premiers les ont découvertes.

Cette nomenclature a déja été adoptée par plusieurs savans de différentes nations; elle a été généralement approuvée : cependant l'espèce de révolution qu'elle commence ne peut s'accomplir que par le renouvellement entier des cartes nautiques; mais le succès, pour être plus lent, n'en sera probablement pas moins sûr.

Cet ouvrage est le dernier qu'ait publié M. de Fleurieu. Si les changemens divers qui ont long-temps agité la France avaient été si funestes à sa fortune, à ses travaux et à sa tranquillité, un nouveau changement fut pour lui l'époque d'une considération nouvelle. Nommé successivement conseiller-d'état et président de la section de la marine, quand l'âge et les infirmités vinrent diminuer en lui l'activité si nécessaire à ces diverses fonctions, de nouveaux honneurs, une place au sénat, celle de gouverneur des Tuileries attestèrent hautement le prix qu'on attachait à ses services.

En retrouvant plus de loisir, M. de Fleurieu revint à ses occupations chéries, à celles qui fonderont principalement sa gloire et le nom qu'il laissera. Ce qu'il avait fait pour quelques voyages particuliers, la lucidité avec laquelle il avait traité les points obscurs dont il s'était occupé, faisaient attendre de lui une histoire générale de la navigation; et l'on avait des preuves qu'il y songeait; on pensait même que l'introduction etait à-peu-près rédigée. Le premier livre devait traiter des voyages des anciens. Un bon juge à qui il en avait lu des fragmens avait été principalement frappé d'un morceau très-curieux sur l'espèce de

voyages qu'avaient pu tenter les anciens peuples avec la forme et la grandeur qu'ils savaient donner à leurs vaisseaux.

Un autre ouvrage passait pour être presque entièrement terminé, et l'on en croyait la publication très-prochaine : c'est le *Neptune des mers du Nord* ou *l'Atlas du Cattegat et de la Baltique*. Ce grand et magnifique atlas était commencé depuis plus de vingt ans. De soixante-onze planches qui devaient le composer, soixante-dix étaient presque achevées; il n'y manquait que certaines indications que l'auteur y voulait ajouter lui-même. M. de Fleurieu n'avait épargné ni soins ni dépenses; il dirigeait l'exécution dans tous ses détails; il avait reconnu par une longue expérience que le papier était peu propre à recevoir ou conserver fidèlement les figures qu'on veut y déposer. C'est sur le cuivre même qu'il traçait les échelles et les divisions de ses cartes; il y plaçait de même les points principaux. Tant d'attentions scrupuleuses exigeaient un temps si long, qu'il a dû craindre souvent de se voir prévenu par les navigateurs du Nord, qui, visitant journellement ces côtes, pouvaient être tentés de suivre les beaux exemples qu'il leur donnait de si loin. Il est certain qu'ils avaient toutes facilités pour composer en moins de temps une description qui, quoique moins importante à plusieurs égards, pourrait mériter d'être préférée des marins par une foule de détails qu'il était dans l'impossibilité de procurer à la sienne. Il était difficile que cette réflexion échappât à M. de Fleurieu, et nous ne devons attribuer qu'aux événemens extraordinaires qui se sont succédé en France pendant vingt ans la lenteur qu'il mit à ce travail. Au reste, ce qui dut souvent lui causer des inquiétudes fondées est notre seul espoir, aujourd'hui que nous avons entièrement perdu celui de voir jamais paraître le *Neptune des mers du Nord*. Si nous devons renoncer à jouir de ce grand travail, rappelons-nous, qu'il en a fait son occupation et son amusement pendant les dernières années de sa vie. Quoique sa

santé considérablement affaiblie nous privât habituellement de la satisfaction de le voir à nos séances de l'Institut ou du bureau des longitudes, nous espérions qu'il compterait encore des jours nombreux; et sans doute, il s'en flattait lui-même, si nous en jugeons par la vaste entreprise dont il avait formé le projet, lorsqu'un matin qu'il venait de recevoir les embrassemens de ses deux jeunes filles et de partager avec sa bonté ordinaire leurs jeux enfantins, il se sentit subitement frappé du coup qui lui ôta presque instantanément les forces, la connaissance et la vie.

Marié en 1792 à mademoiselle Deslacs d'Arcambal, il a goûté constamment le bonheur de l'union la mieux assortie sous tous les rapports de la raison, de l'esprit, du caractère et des vertus. Après les orages qui avaient englouti son modeste patrimoine, la fortune ne lui a pas souri assez de temps pour qu'il réparât ses pertes, et il n'a pu laisser à ses enfants d'autre héritage que son nom, l'exemple de toutes les vertus, et la juste considération qui en est la récompense.

M. de Fleurieu est mort le 18 août 1810; il a été remplacé à l'Institut par M. Beautems-Beaupré, et au bureau des longitudes par M. de Rossel, connus tous deux par leurs travaux dans le voyage à la recherche de la *Peyrouse*.

NOTICE

SUR LA VIE ET LES OUVRAGES

DE CHARLES BOSSUT.

PAR M. le Chev DELAMBRE, Secrétaire Perpétuel.

Lue dans la Séance publique de la Classe des Sciences, le 9 janvier 1815.

CHARLES BOSSUT, membre de l'Académie des sciences et ensuite de l'Institut, des Académies de Bologne, de Pétersbourg et de Turin, examinateur des élèves du corps militaire du génie, et de l'école polytechnique, membre de la légion-d'honneur, naquit à Tartaras, département du Rhône-et-Loire, le 11 août 1730, de Barthélemi Bossut et de Jeanne Thonnerine. Sa famille était originaire du pays de Liége, d'où quelques malheurs l'avaient forcée de s'exiler, vers l'année 1542. A l'âge de six mois il perdit son père. Un oncle paternel lui enseigna les premiers principes de la grammaire et de la langue latine, le familiarisa de bonne heure avec les classiques latins et français, et le mit à 14 ans au collége des Jésuites à Lyon, pour achever son cours d'études. Le jeune Bossut s'y fit bientôt remarquer de ses maîtres, par la facilité qui lui faisait remporter tous les prix, et de ses condisciples, par un caractère aimant et sensible qui les intéressait à ses succès. Ils lui firent une sorte de réputation qui bientôt franchit l'enceinte du collége.

Les éloges de Fontenelle étant tombés entre ses mains, il y

puisa la passion la plus forte pour les mathématiques. Brûlant de marcher sur les traces des grands hommes dont les belles découvertes enflammaient son imagination, et ne trouvant à Lyon personne qui pût guider ses premiers pas, il osa s'adresser directement à Fontenelle pour lui demander des conseils; il en reçut une réponse encourageante : *Je vous prie*, lui mandait le vieillard plus que nonagénaire, *de me donner de temps en temps des nouvelles de votre marche. J'ai un pressentiment qui me dit que vous irez loin, mais je ne pourrai vivre assez pour jouir de vos succès*. Il n'en fallait pas tant pour inspirer à Bossut la résolution de se rendre à Paris; Fontenelle l'accueillit avec bonté, le fit connaître à Clairaut et à d'Alembert qui lui prodiguèrent les encouragemens. D'Alembert sur-tout en fit plus particulièrement son élève, et se plaisait à lui aplanir les difficultés qui pouvaient retarder ses progrès. Le temps cimenta cette union fondée d'une part sur la bonté qui s'attache en raison des bienfaits qu'elle a multipliés, et de l'autre sur la reconnaissance la plus juste et la plus vivement sentie. Cette union a subsisté sans altération jusqu'à la mort de d'Alembert. Bossut avait fait une étude particulière des écrits de son maître; et celui-ci, quand on venait lui demander quelques éclaircissemens sur des passages difficiles, qui auraient exigé de sa part qu'il relût son travail avec quelque attention, renvoyait à son disciple, au confident de ses pensées, par ces mots: *Voyez Bossut.*

Camus, autre membre de l'Académie des sciences, examinateur des élèves de l'artillerie et du génie, conçut pour lui la même affection, et le présenta au comte d'Argenson, ministre de la guerre, qui le nomma professeur de mathématiques de l'école du génie à Mézières; c'était en 1752, Bossut avait alors 22 ans.

Vers la fin de la même année, l'Académie des sciences l'admit au nombre de ses correspondans. Il lui avait lu un Mémoire

intitulé : *Usages de la différentiation des paramètres pour la solution de plusieurs problèmes de la méthode inverse des tangentes.* Ce Mémoire se trouve dans le second volume des savans étrangers. L'historien de l'Académie, en analysant cet ouvrage, dit qu'on y trouve la solution de plusieurs problèmes proposés par J. Bernoulli, et dont le premier n'avait encore été résolu par personne. En parlant des méthodes de Bossut, il assure qu'elles ont paru courtes et élégantes. Il porte le même jugement de la solution de deux autres problèmes qui composent un second Mémoire inséré dans le même volume.

Les actes de Leipsick avaient, en 1754, énoncé un théorème d'Euler sur la différence rectifiable de certains arcs elliptiques. Bossut, en le démontrant (dans le tome III des Savans Étr.), y joignit une méthode simple et directe pour découvrir ce théorème *a priori.* Dans le même volume, il appliquait à divers problèmes concernant la cycloïde une méthode qui fut alors jugée d'autant plus ingénieuse, qu'elle n'est pas bornée à ces problèmes seuls, mais qu'elle peut servir en beaucoup d'autres occasions.

Les fonctions de professeur de mathématiques, auxquelles il se livra pendant seize années sans interruption avec un succès toujours croissant, à l'école de Mézières, ne l'empêchaient pas de se faire connaître au dehors par nombre d'ouvrages dont les sujets lui étaient indiqués ou par ses leçons mêmes, ou par les travaux des géomètres contemporains, ou par les programmes des académies. C'est ainsi qu'il composa d'abord ses élémens de mécanique qu'il reproduisit depuis dans son cours complet de mathématiques; qu'il mérita de partager avec le fils et l'élève de Daniel Bernoulli un prix proposé par l'Académie de Lyon sur la meilleure forme des rames; avec le fils d'Euler, et probablement avec Euler lui-même, un prix sur l'arrimage proposé par l'Académie des Sciences. Le triomphe entier eût été moins brillant, lui

dit à ce sujet Clairaut, l'un des juges du concours, puisqu'on n'aurait pas connu sur qui vous l'eussiez emporté.

Il obtint seul le prix sur la question, Si les planètes se meuvent dans un milieu dont la résistance produise quelque effet sensible sur leurs mouvemens. Albert Euler avait entrepris un travail sur le même sujet. Ces deux auteurs s'étaient parfaitement rencontrés dans tout ce qui concerne les planètes principales; mais Albert avouait qu'il n'avait osé aborder la partie de la question qui regarde la lune; il félicitait Bossut d'avoir surmonté des difficultés qui l'avaient lui-même effrayé au point de lui faire abandonner l'entreprise. Il paraissait résulter de ce travail que l'accélération observée par les astronomes dans le mouvement de la lune pouvait s'expliquer par la résistance de la matière éthérée. Mais un des plus grands géomètres dont la France puisse se glorifier a trouvé depuis une cause moins détournée et plus naturelle qui explique parfaitement cette accélération, et la résistance éthérée est devenue une cause très-problématique dont les effets, s'ils ne sont pas absolument nuls, sont du moins à très-peu-près insensibles.

La même année (1762), Bossut partageait avec Viallet le prix quadruple proposé par l'Académie de Toulouse pour la construction la plus avantageuse des digues. On le voit de même trois ans après partager un prix double décerné par l'Académie des sciences sur les méthodes d'arrimage, et couronné seul deux fois consécutives, à Toulouse, pour les recherches des lois du mouvement que suivent les fluides dans les conduits de toute espèce.

Il devait à l'amitié de Camus la place de Mézières qui lui avait fourni les moyens de s'appliquer sans distraction à l'étude des mathématiques. La manière dont il remplit et les fonctions de professeur, et les intervalles de loisir qu'elles lui laissaient, le fit hériter des deux places de son protecteur et de son ami. Bossut

reçut du gouvernement la première, et les suffrages de l'Académie l'appelèrent à la seconde. C'est alors qu'il donna sa méthode pour sommer les suites dont les termes sont des puissances semblables de sinus ou cosinus d'arcs qui forment une progression arithmétique.

Euler, dans son introduction à l'analyse des infinis, avait déja sommé ces suites qu'il rapportait aux suites récurrentes. Bossut, pour arriver aux mêmes expressions, n'emploie que les formules les plus élémentaires de la trigonométrie, ou quelques règles également simples de la théorie des proportions. Cette manière a l'avantage d'être plus claire, et par-là même à la portée d'un nombre bien plus grand de lecteurs. Si la gloire d'une découverte appartient incontestablement à celui qui l'a fait connaître le premier, on ne peut refuser beaucoup d'estime à celui qui rend populaires des notions qui paraissaient d'abord réservées aux savans.

Le même avantage se fait remarquer dans sa méthode pour le retour des suites. Ce sujet a exercé les plus grands géomètres; on l'a vu depuis traité d'une manière plus analytique et plus savante dans un beau Mémoire de Lagrange. Mais si la méthode de Bossut n'a pas la même généralité, si elle n'est pas renfermée dans une formule unique et qui frappe d'étonnement celui qui la voit pour la première fois, elle se distingue par d'autres qualités, elle repose sur le théorême le plus élémentaire de la différentiation. Elle n'exige que des calculs faciles et uniformes, et elle se grave dans la mémoire, au point qu'il est impossible de l'oublier, et que l'astronome, qui plus que tout autre est appelé à en faire usage, la porte toujours avec lui, et n'a dans l'occasion aucun ouvrage à consulter.

Parent avait autrefois donné, pour évaluer l'effet des roues mues par le choc de l'eau, une méthode bien simple, mais aussi fort inexacte. Bossut entreprit de faire entrer dans le calcul

toutes les considérations négligées par Parent et par tous les autres qui avaient adopté la règle de ce géomètre avec trop de confiance. Le problème, dans toute sa généralité, pourrait bien être insoluble; mais dans les applications, il est permis de négliger les circonstances qui ne se rencontrent pas dans les machines usitées, ou qui ne peuvent avoir que des effets presque insensibles. Par ces moyens, Bossut arrive à une équation qui peut s'adapter à tous les cas possibles, soit en faisant varier certains termes, soit même en les supprimant tout-à-fait; il obtient de cette manière, sinon cette exactitude rigoureuse qui appartient exclusivement à la géométrie pure, du moins celle dont les arts peuvent se contenter.

Tous ces Mémoires particuliers, et plusieurs autres que le temps ne nous permet pas d'analyser, se trouvent refondus, expliqués, appliqués et complétés, soit dans l'encyclopédie méthodique dont Bossut fut l'un des rédacteurs, soit dans le Cours de Mathématiques qu'il composa pour l'usage plus spécial des élèves dont il était l'examinateur, enfin dans un Traité d'Hydrodynamique, ouvrage plus neuf, et dans lequel il avait inséré ses diverses expériences sur les mouvemens des fluides.

« Il n'y a qu'un géomètre, disait à cette occasion Condorcet dans l'Histoire de l'Académie, il n'y a qu'un géomètre bien exercé à la théorie et au calcul qui puisse donner aux expériences la forme qu'elles doivent avoir pour être comparables avec la théorie; il n'y a qu'un géomètre qui puisse savoir, soit quelle précision peut produire dans la théorie une expérience dont le degré d'exactitude est donné, soit réciproquement avec quelle précision les expériences doivent être faites pour qu'on puisse les employer à fonder ou à vérifier une théorie. Des expériences faites par un géomètre tel que M. Bossut, doivent donc être bien précieuses, tant pour les mathématiciens qui voudront approfondir la théorie des fluides, que pour les mécaniciens qui s'occupent de l'hydraulique. »

Dans ce premier essai, Bossut avait considéré le mouvement des fluides en général. Quatre ans après, le gouvernement le chargea d'une nouvelle suite d'expériences sur la résistance des fluides dans les canaux étroits et peu profonds. Il en fit le sujet d'un ouvrage publié en 1777. Enfin, l'année suivante, il en inséra d'autres dans les Mémoires de l'Académie, et elles avaient pour objet de découvrir la loi suivant laquelle diminue la résistance d'une proue angulaire, à mesure que cette proue devient plus aiguë.

Son cours de mathématiques, loué aux époques où les diverses parties qui le composent ont successivement paru, pour l'ordre, la clarté, la méthode et l'esprit philosophique, a partagé long-temps la vogue avec celui que Bezout avait fait pour l'artillerie et la marine. Ces cours étaient en quelque manière d'obligation pour les élèves auxquels ils étaient destinés; ils ont perdu nécessairement une partie de leur célébrité depuis qu'un établissement unique a été formé pour l'instruction de tous ceux qui se destinent à servir l'état dans tous les corps qui avaient auparavant leurs livres et leurs examinateurs particuliers. Mais elle a subsisté du moins assez long-temps pour que l'auteur en recueillît le fruit de tant de travaux, et pût s'assurer une existence à-peu-près indépendante à l'époque où les orages politiques vinrent déranger toutes les fortunes. Bossut se vit priver alors d'une chaire d'hydrodynamique fondée pour lui, et qui n'eut qu'une existence éphémère; il s'était déja vu enlever, non sans gémir de l'injustice des hommes, cette place d'examinateur qu'il avait remplie avec probité et à la satisfaction générale des élèves et des supérieurs. En perdant ses traitemens d'académicien, de professeur et d'examinateur, Bossut n'obtint d'autre dédommagement que quelques secours passagers décernés sur l'avis du bureau de consultation, un logement au Louvre dont il jouit peu de temps; et alors il s'enfonça dans la retraite dont son âge

et l'état actuel de sa fortune lui faisaient une loi. Quelques consolations vinrent l'y chercher. L'Institut lui rendit une partie de ce dont il jouissait à l'Académie des Sciences; il fut l'un des examinateurs de l'École Polytechnique; et quand après quarante ans de services, l'age et les infirmités le forcèrent à demander sa retraite, on lui conserva le traitement qu'il avait si bien mérité.

C'est dans cette solitude et cet éloignement de la société où il avait été autrefois plus répandu, qu'il composa son Histoire des Mathématiques qui eut deux éditions en moins de six années. Deux volumes sont bien peu pour un sujet aussi vaste. Aussi les mathématiciens trouvèrent-ils l'ouvrage trop incomplet ou plutôt trop superficiel. Mais ce n'était pas pour eux non plus qu'il avait été composé. On voit, par les réflexions que l'auteur fait sur l'ouvrage de Montucla, qu'il sentait dans quel esprit et selon quel plan une pareille histoire doit être composée; mais il ajoute aussitôt que son dessein n'est pas de donner cette histoire approfondie, où toutes les parties des mathématiques seraient analysées, et qui pourrait dispenser jusqu'à un certain point de la lecture des auteurs, au moins de ceux dont les méthodes auraient vieilli. Il ne prétend *qu'esquisser un tableau général des progrès des mathématiques depuis leur origine jusqu'à nos jours; honorer la mémoire des grands hommes qui en ont étendu l'empire*, et *sur-tout inspirer à la jeunesse le goût et l'étude de ces sublimes connaissances*. Il se souvenait sans doute de ce qu'il avait senti dans sa jeunesse à la lecture des écrits de Fontenelle. Sa première édition ne portait que le titre modeste d'essai. Il témoigna depuis qu'il avait été content du succès qu'il avait obtenu. Son histoire avait été traduite en plusieurs langues; on y avait trouvé de la méthode et de la clarté; on en avait loué le style. Il avoue en même temps que la seconde édition qui portait le titre d'Histoire Générale avait été moins heureuse, et qu'elle avait essuyé des critiques assez vives. La cause qu'il assigne à cette différence,

c'est que dans son Essai, il s'était interdit de parler des auteurs vivans, au lieu qu'en conduisant son histoire jusqu'à nos jours, il devait trouver des juges plus difficiles à satisfaire. Sans nier absolument la justesse de sa remarque, il faut convenir aussi que les raisons par lesquelles il justifie quelques omissions paraissent assez faibles. Les lecteurs les plus désintéressés ont dû voir que plusieurs ouvrages modernes n'y étaient pas appréciés avec un soin proportionné à leur importance. L'auteur, qui avait exposé avec intérêt les discussions entre Newton et Leibnitz, les démêlés plus récens des deux protecteurs de la jeunesse, Clairaut et d'Alembert, s'était trouvé plus gêné en parlant d'auteurs pour lesquels il n'avait peut-être pas les mêmes affections. Cette gêne se fait sentir dans ce qu'il laisse apercevoir, comme dans ce qu'il supprime, et cette partie de l'ouvrage était véritablement à refondre. Son grand âge et ses infirmités lui interdisant l'espérance de faire mieux et d'être plus heureux, il pense que *son ouvrage est de nature à être perfectionné par des successeurs plus capables de remplir ses propres intentions.*

Ses intentions étaient d'être juste, mais il voulait qu'on le fût à son égard, comme il se proposait de l'être pour les autres. Il convient, dans un manuscrit qu'il nous a fait remettre, qu'il a toujours eu une roideur de caractère « qui lui a souvent nui « auprès de ceux qui ne le connaissaient que superficiellement. « Il n'accordait pas facilement sa confiance; il croyait en général « les hommes dissimulés et trompeurs; mais quand il croyait « pouvoir s'abandonner à la franchise naturelle de son ame, il « mettait dans le commerce de la vie une effusion de sentimens « vrais qui lui ont fait une foule d'amis dévoués, sur-tout dans « le corps militaire du génie. Il abhorrait les charlatans de toute « espèce, nous dit-il encore, et quelquefois il avait eu l'impru- « dence ou la maladresse de leur donner à connaitre son opinion. « Mais il cherchait par-tout le vrai mérite; il était obligeant, et il

« se plaint amèrement des ingrats; il se persuada que des hommes « qui lui devaient leur première existence avaient montré l'acharnement le plus soutenu, et s'étaient donné bien des peines « qu'ils auraient pu s'épargner, pour l'écarter de places où il « n'avait point aspiré. »

Il est peu surprenant qu'avec de pareilles préventions aigries par la solitude, et fortifiées par l'espèce d'abandon où il se croyait après avoir joui d'une considération et d'une influence dont il s'exagérait encore la diminution, il ait mis moins de zèle à faire valoir des contemporains qu'il croyait en général disposés peu favorablement pour lui. On voit l'effet de ces préventions dans une préface chagrine qu'on lit à la tête de ses Mémoires de mathématiques publiés en 1812. Ces Mémoires sont ceux qui avaient été couronnés et publiés, dans le temps, par l'Académie des sciences. Il y a joint quelques notes sur son Histoire des Mathématiques; il explique ou démontre des théories qu'il avait un peu trop abrégées, mais il n'ajoute rien qui puisse remplir les lacunes qui avaient excité les réclamations auxquelles il se montra si sensible.

Plaignons-le d'avoir été si long-temps le jouet d'une imagination ombrageuse, qui paraît avoir fait le malheur de ses dernières années. Avant que l'âge, les infirmités et la perte de ses places eussent développé ses dispositions à la misanthropie, il nous avait paru plus rempli de bienveillance; et je me souviens avec reconnaissance de l'accueil qu'il fit, comme directeur de l'Académie des Sciences, aux premiers essais que j'avais présentés à cette compagnie, quoiqu'il me sût lié particulièrement à un astronome dont il était peu l'ami, et dont il devait me considérer comme l'élève et le protégé.

On peut donner une interprétation moins défavorable à ces omissions que nous ne prétendons pas excuser entièrement. Un grand ouvrage de mathématique transcendante ne se lit pas

comme un ouvrage de littérature et d'histoire. Pour en bien sentir le mérite et la difficulté, pour se mettre en état d'en exposer le plan et d'en indiquer les parties les plus intéressantes, il faut un travail, une contention, d'esprit dont la vieillesse n'est plus susceptible. Un géomètre qui aurait eu véritablement du génie pourrait encore nous étonner par de nouvelles productions dans un âge même très-avancé, mais ces productions seraient des développemens d'idées premières dont il n'aurait pas encore trouvé l'occasion de tirer toutes les conséquences; il serait effrayé à la seule pensée de suivre long-temps la marche d'un autre géomètre. C'est à la ville que Lagrange a composé ses derniers Mémoires, et dans ce temps même il avouait le besoin d'être à la campagne pour bien se rendre compte des nouvelles méthodes de M. Gauss.

Bossut voulait être juste et impartial; il le voulait par une suite de cette roideur même de caractère dont il s'accuse et dont il avait donné des preuves nombreuses. Nous n'en citerons qu'une seule.

Dans le temps qu'il était examinateur du génie, le comte de Muy, déja commandeur de l'ordre du Saint-Esprit et gouverneur de Provence, depuis maréchal de France et ministre de la guerre, lui avait directement recommandé nombre d'élèves qui, par une fatalité singulière, n'étaient presque jamais dignes d'être admis, et ne l'étaient pas. Le comte de Muy en avait marqué quelque mécontentement. Lorsque dans la suite il devint lui-même ministre de la guerre, et que, suivant l'usage, Bossut alla pour la première fois lui présenter le tableau raisonné de l'examen qu'il venait de faire, le ministre signa l'état de la promotion sans hésiter, adressant à Bossut ces paroles qui honorent également et le ministre et le savant : *Je signe aveuglément, j'ai éprouvé qu'il ne faut pas regarder après vous.*

Bossut était grand admirateur de Pascal; il en publia les œuvres

complètes en 1779, et il recueillit avec soin toutes les pensées et les autres morceaux inédits qui lui fournirent les manuscrits et les copies authentiques. Pour la première fois on connut Pascal tout entier. L'éditeur ne voulut rien supprimer ni dissimuler pas même la note que Pascal écrivit environ un mois après son accident de Neuilly. Ce fut pour cette édition que Bossut composa ce discours sur la vie et les ouvrages de Pascal, qu'il a reproduit à toutes les occasions qu'il en trouva depuis. C'était de tous ses ouvrages celui dont il avait plus soigné le style; c'est celui où il avait déposé ses opinions et ses sentimens en matière de littérature, de science et de religion. Il voyait en Pascal *un phénomène singulier qui méritait d'être souvent rappelé. Ce profond raisonneur était en même temps un chrétien soumis et rigide.* On voit que Bossut voulait se peindre lui-même. Destiné dès son enfance à l'église, connu jusqu'en 1792 sous le nom d'abbé Bossut, si la passion des mathématiques et ses fonctions de professeur, auxquelles il fut appelé si jeune, l'empêchèrent de se consacrer entièrement à l'état eclésiastique, il en conserva du moins pendant long-temps le costume, et il en professa toute sa vie les sentimens. Il mourut le 14 janvier 1814, et il vient d'être remplacé à l'Institut par M. Ampère.

NOTICE

SUR LA VIE ET LES OUVRAGES

DE M. L'ÉVÊQUE.

Par M. le Ch[er] DELAMBRE, Secrétaire Perpétuel.

Lue dans la Séance publique de la Classe des Sciences, le 8 janvier 1816.

Pierre Lévêque, ingénieur hydrographe de la marine, professeur royal d'hydrographie et de navigation, examinateur de l'Ecole Polytechnique et de la marine, membre de l'Académie royale de marine, de l'Institut royal de France et de la légion d'honneur, etc., naquit à Nantes le 4 septembre 1746. Il y fit ses études avec cette distinction qui annonce ordinairement, sans les garantir toujours, les succès qu'on obtiendra dans les lettres ou les sciences, et qui prouve au moins l'aptitude à se faire remarquer dans la carrière où l'on sera porté par les circonstances ou par son propre choix. Celui de M. Lévêque ne fut pas douteux; il le décida pour les sciences exactes et pour la navigation qui les suppose toutes.

Né dans une ville commerçante, les objets relatifs à la marine furent les premiers qui frappèrent ses yeux. Pour les connaître mieux, il voulut en faire une étude approfondie; il voulut pratiquer lui-même, et à l'âge de dix-huit ans il s'embarqua sur un vaisseau de l'état. Le titre qui l'y fit admettre, les fonctions auxquelles il se dévouait, n'étaient pas de celles qui peuvent flatter

l'amour-propre ou entretenir les rêves de l'ambition; il ne voulait que s'instruire; il en prit la voie la plus directe et la plus sûre. Pendant les deux années que dura son voyage, il acquit une connaissance intime et raisonnée de toutes les parties qui composent le vaisseau, et de toutes les opérations qui constituent la science de la manœuvre. A ces connaissances pratiques, il voulut joindre à son retour toutes les théories qui pouvaient les éclairer, et dont il n'avait emporté que les premiers élémens.

Seul, avec le secours des livres, il se forma lui-même, se fit connaître avantageusement, et il obtint la place de professeur royal dans ce port où il avait déja fait de nombreux et bons élèves. A son titre de professeur, il ajouta bientôt ceux d'ingénieur et de correspondant de l'Académie royale de marine et de l'Académie des Sciences.

Parmi les connaissances nécessaires aux marins, l'astronomie ne fut pas la dernière à fixer ses regards. La science des longitudes venait d'être créée; il fallait la naturaliser et vaincre la répugnance que ne manquent jamais d'inspirer les innovations même les plus utiles. C'est à triompher de cette disposition trop commune que M. Lévêque appliqua tous ses soins; il chercha tous les moyens d'abréger des calculs indispensables. Ses recherches astronomiques l'avaient mis en correspondance avec l'astronome célèbre qui remplissait alors avec tant d'éclat la chaire du collége royal de France; il le consultait sur ce qu'il pourrait faire de plus utile à la science et à ceux qui la cultivent.

Lalande employait alors tous ses moyens et toute son influence à propager la méthode de longitude qui se fonde sur les éclipses de soleil ou d'étoiles. Cette méthode se déduit aisément des règles données par Ptolémée dans sa *Syntaxe mathématique;* elle fut depuis complètement expliquée par Képler, et cependant jamais elle n'avait pu prendre la moindre faveur. Les astronomes d'alors redoutaient la longueur des calculs. Des savans distingués, parmi

lesquels on compte Dominique Cassini, avaient imaginé des moyens très-ingénieux pour remplacer la trigonométrie par les opérations graphiques de la projection. Leur méthode, utile pour annoncer les circonstances principales d'une éclipse, et tous les pays où elle pourra s'observer, a le double inconvénient d'être beaucoup plus longue et beaucoup moins sûre, quand il s'agit de déterminer la position des lieux où l'éclipse a été observée, et sur-tout si l'on veut qu'elle serve à perfectionner les tables astronomiques.

C'est ce que Lalande s'efforçait de persuader aux astronomes, en leur recommandant la méthode de Képler et de Ptolémée. C'est celle qui se fonde sur le nonagésime, c'est-à-dire sur la position relative et sans cesse variable de l'écliptique et de l'horizon. On peut en construire des tables qui donnent à vue les préliminaires des calculs. Ptolémée avait donné le premier modèle de ces tables; Képler les avait refaites avec plus d'exactitude, mais elles n'étaient pas encore assez étendues pour être d'un usage général. Les observatoires se sont multipliés, nos navigateurs ont parcouru tout le globe, c'est au globe tout entier que M. Lévêque a voulu étendre ces tables que Ptolémée n'avait calculées que pour sept climats différens. Mais en leur donnant cette généralité, il voulut y joindre toute la précision qui est nécessaire aux opérations les plus délicates de l'astronomie moderne.

Dans le temps où M. Lévêque travaillait à faciliter le calcul des éclipses, notre grand géomètre Lagrange s'occupait du même problême; mais le traitant d'une manière toute analytique, il éliminait le nonagésime qui en est le premier fondement. En admirant le travail et le génie de Lagrange, les astronomes sont demeurés fidèles à leur méthode qui leur paraît toujours tout au moins aussi exacte et beaucoup plus facile. On a voulu tout nouvellement reproduire les formules de Lagrange, mais pour

les débarrasser des longueurs qui y sont comme inhérentes, le premier soin a été de rétablir le nonagésime et les parallaxes, puis on a introduit de nouveaux arcs subsidiaires, c'est-à-dire qu'on a fait disparaître tout ce qu'il y avait d'analytique, pour en revenir aux formes purement astronomiques; ce qui est confesser tacitement que, pour ce problème élémentaire, la trigonométrie sphérique, qui est aussi une espèce d'analyse, a l'avantage sur la méthode des trois coordonnées rectangulaires, qui n'est au fond que la trigonométrie plane.

Les Tables de M. Lévêque parurent en 1776 à Avignon, en deux volumes in-8°. Le gouvernement, pour faciliter cette utile entreprise, fit en partie les frais de l'édition.

Flatté d'avoir pu rendre ce service aux astronomes, plus encore qu'aux navigateurs, M. Lévêque conçut pour ces derniers le projet de grandes tables qui leur abrégeraient le calcul de l'angle horaire, qui est pour eux une opération de tous les momens. Il avait essayé toutes les combinaisons qui pouvaient diminuer la peine du calculateur sans trop grossir le volume. Plusieurs feuilles de ces tables ont été imprimées, mais malgré tous les efforts de l'auteur, on trouva qu'elles seraient trop considérables, et ce projet fut abandonné.

Occupé par état de l'instruction de la jeunesse dans la théorie et la pratique de la navigation, il rassembla dans un ouvrage élémentaire tout ce qui faisait la matière de ses leçons, et publia son *Guide du Navigateur*, où l'on trouve l'histoire de toutes les tentatives faites en différens temps pour le problème des longitudes, la pratique de tous les instrumens qu'emploie l'astronomie nautique, les règles de calculs les plus simples pour tous les problêmes usuels, le tout accompagné des tables nécessaires. Ces divers avantages ont assuré le succès de ce livre, dont on attendait une édition nouvelle à laquelle l'auteur a long-temps travaillé. Sa mauvaise santé et ses diverses occupations l'ont em-

pêché d'y mettre la dernière main, et l'un de ses amis est à la recherche de ce qui peut y manquer encore pour en procurer une prompte publication.

Dans cet ouvrage, il ne cherchait qu'à guider les commençans à qui même il n'avait pas osé donner une instruction aussi solide qu'il l'eût desiré; mais il ne s'était pas moins occupé de la partie transcendante de la navigation; il avait médité profondément les traités des Bouguer, des Bernoulli et des Euler. Il lui fut aisé d'apercevoir que la pratique était trop étrangère à ces grands géomètres, et que des considérations d'une grande importance avaient dû leur échapper dans les questions si compliquées qu'ils avaient tenté de résoudre. Il crut voir le plan dont il avait conçu l'idée, heureusement exécuté dans l'ouvrage d'un Espagnol, qui, aux connaissances mathématiques, avait su joindre celles d'un grand navigateur. En homme qui ne cherchait véritablement qu'à se rendre utile, et qui, dans son *Guide du Navigateur*, avait supprimé une partie de son propre travail, et l'avait remplacé par celui d'un étranger qui avait traité le même sujet plus à fond, M. Lévêque résolut d'adopter en entier l'ouvrage de D. G. Juan, et de se borner au rôle de traducteur. Mais ne voulant rien admettre de confiance, il s'imposa la loi de refaire les calculs immenses qui ne sont qu'indiqués dans l'*Examen maritime*, d'en vérifier les résultats, de les réformer quand il s'y était glissé quelque faute, enfin d'en combattre les principes, quand il les jugeait erronés. Mais respectant l'œuvre qu'il traduisait, il mit modestement ses observations en note, en sorte qu'il a conservé le texte dans toute son intégrité, en même temps qu'il en aplanissait les difficultés aux commençans, et qu'il proposait les améliorations dont il le jugeait susceptible.

Cet ouvrage, malgré son importance, ne convenait pas à un assez grand nombre de lecteurs pour qu'on pût en espérer la publication, et le gouvernement vint encore cette fois au secours

O 2

de l'auteur, qui, en reconnaissance, dédia son ouvrage au ministre qui en avait favorisé l'impression.

La belle invention de Montgolfier, le nouvel appareil et les brillantes expériences de M. Charles, occupaient en France tous les esprits; partout on s'efforçait de les imiter pour donner aux provinces le spectacle dont Paris et Versailles avaient seuls joui. M. Guiton de Morveau, qui vient d'être enlevé aux sciences, l'avait montré à Dijon; Nantes dut la même satisfaction à M. Lévêque, qui, pour la lui procurer, inventa un appareil pneumato-chimique dont la description se trouve dans les Mémoires de l'Académie pour 1784. Nantes lui doit de même une pompe à feu, l'une des premières qui aient été exécutées en France, et qui fut destinée à la mouture du grain et à la fabrication du biscuit.

Tout ce qui pouvait être utile devenait aussitôt l'objet de ses méditations et lui procurait l'espèce de jouissance qu'il ambitionnait par-dessus toutes. Les orages politiques vinrent changer la direction de ses pensées et de ses efforts qu'il variait suivant les circonstances, mais toujours dans les mêmes vues, l'amour du bien public et la prospérité de l'état. Ami de la modération, opposé par caractère à toute violence, à toute injustice, par l'ascendant que lui avaient acquis ses vertus et ses services, il sut pendant un temps calmer les esprits, il eut le bonheur d'en retenir quelques-uns et d'en éclairer quelques autres. Mais qui pouvait toujours résister à ce torrent? Bientôt des persécutions de toute espèce furent la récompense de ses soins et de sa bienveillance. Pleurant la perte de ses amis, tremblant pour les jours d'une épouse chérie, qui partageait tous ses sentimens et avait déployé le même caractère, il se vit contraint de fuir le théâtre de scènes trop déplorables, et d'errer pendant plus d'une année.

Nommé représentant de la Loire-Inférieure en 1797, compris presque aussitôt dans la proscription de fructidor, il fut réduit

à se cacher de nouveau, jusqu'à ce que son mérite bien connu lui eût fait obtenir la place d'examinateur de l'École Polytechnique, place qu'il quitta cinq ans après *pour s'en tenir à celle d'examinateur de la marine*, à laquelle il avait été nommé en 1786. C'est alors qu'ayant fixé son domicile à Paris, il put prétendre à devenir membre de l'Institut. Présenté en 1799 pour la place de géométrie, vacante par la mort de Borda, il ne s'en fallut que de bien peu qu'il ne partageât les voix avec un géomètre célèbre. Présenté une autre fois pour une place d'astronome, il ne céda qu'à un ancien membre de l'Académie des Sciences. Enfin, ne trouvant plus de concurrent qui eût à lui opposer des titres plus anciennement reconnus, il se vit, en 1801, nommé pour remplacer le géomètre Cousin dans la section de physique générale. Il eût pu de même prétendre à une place de navigation, si elles n'eussent alors été remplies d'une manière si brillante par les Bougainville et les Fleurieu. Nommé commissaire avec eux, toutes les fois que la Classe avait à prononcer sur quelque objet relatif à la marine, c'est dans ces sujets surtout qu'il sut se rendre utile à l'Institut par des rapports lumineux, toujours adoptés par la Classe, qui les a fait imprimer dans le recueil de ses Mémoires. Le ministre de la marine lui témoigna la même confiance, et le chargea d'extraire et de traduire la description nautique des côtes orientales de la Grande-Bretagne, des côtes de Hollande, de Jutland et de Norwège, publiée en 1803 par le dépôt général de la marine. Cet ouvrage, qui ne doit être qu'une énumération des caps, des baies, des rades, des écueils et des phares, du brassiage et de la qualité des fonds, est du nombre de ceux dans la composition desquels on ne peut être soutenu que par le desir d'être utile. Moins faits pour être lus que consultés au besoin, le principal mérite qu'ils puissent avoir est la clarté et l'exactitude. Ils doivent être rédigés dans le langage nautique; tout ornement leur serait étranger et

même nuisible. Les matériaux étaient épars dans divers ouvrages; on doit savoir gré au traducteur de la peine qu'il a prise à les recueillir, à les disposer dans l'ordre le plus avantageux, enfin à les faire passer dans une autre langue, ce qui offre des difficultés qu'on ne peut bien sentir qu'en s'essayant soi-même en ce genre. L'embarras est moins d'entendre le vrai sens de l'expression que de lui trouver l'équivalent qui n'existe pas toujours. On le voit par les notes de M. Lévêque sur l'*Examen maritime* de D. G. Juan. Pour lever ces difficultés toujours renaissantes, il avait conçu le plan d'un dictionnaire polyglotte de tous les termes de marine. Cet ouvrage devait être volumineux; l'auteur en avait presque tous les matériaux, et déja quelques parties en sont fort avancées. Il préparait en même temps un traité pratique de la manœuvre, auquel il avait joint ce qu'il y a de plus intéressant dans la tactique de Mazzaredo, de Clarke et de quelques auteurs peu connus en France; un traité théorique et pratique de la construction et des usages de tous les instrumens employés dans la navigation, soit à la mesure des angles, soit à la direction du vaisseau. Cet ouvrage, qui devait avoir deux volumes, est presque achevé, ainsi qu'un abrégé historique de l'origine et des progrès de la navigation en un volume. Il laisse en outre beaucoup d'observations et de recherches sur les marées, pour servir à la composition d'un ouvrage particulier sur ce sujet intéressant; enfin un grand travail sur le jaugeage des vaisseaux, demandé en 1786 par le ministre de la marine.

Nous n'avons pas encore parlé de ses recherches sur les moyens de corriger des effets de la réfraction et de la parallaxe les distances de la lune dans le problême des longitudes. Ce Mémoire a paru dans la connaissance des temps, et l'auteur y paraît avoir épuisé toutes les ressources que peuvent offrir l'une et l'autre trigonométrie.

L'énumération de tant d'ouvrages entrepris et presque ter-

minés fait regretter que l'auteur ait été distrait si souvent de ces travaux utiles par ses fonctions d'examinateur, dans lesquelles il aurait pu si facilement être suppléé, qui chaque année consumaient en voyages une partie considérable et si précieuse de son temps, et qui peut-être ont abrégé sa carrière.

« Comme il connaissait tout le prix du savoir, il veilla particulièrement à l'éducation de ses enfans. Il avait un fils qui avait répondu dignement à ses soins, et qui était devenu l'un de nos officiers du génie les plus distingués. Il eut le malheur de le perdre à vingt-sept ans dans l'une de nos guerres les plus désastreuses. Il en fut inconsolable, et sa santé déja chancelante en fut profondément affectée; elle reçut encore de vives atteintes des émotions d'un genre tout contraire que lui causèrent les grands événemens de 1814. Enfin il succomba subitement, le 16 octobre de la même année, à une attaque d'apoplexie foudroyante, au moment où il achevait au Hâvre un examen des élèves de la marine. C'est avec une bonté toute paternelle qu'il exerçait ces fonctions, dont l'effet naturel est d'inspirer une certaine terreur aux jeunes élèves. Mais depuis long-temps ils se présentaient à lui avec plus d'assurance; ils connaissaient l'affection qu'il leur portait à tous, et sa réputation l'avait précédé. »

« Bon fils, bon père, bon époux et bon frère, il laisse une sœur dont il ne se sépara jamais, une fille chérie, tendre objet de tous ses soins, une veuve, modèle de toutes les vertus (Claude-Victoire Mornet, qu'il avait épousée en 1782), qui chaque jour donne des larmes à la mémoire d'un époux et d'un fils dignes tous deux de toute sa tendresse. »

M. Lévêque a été remplacé à l'Institut, le 12 juin 1815, par M. Girard.

HISTOIRE

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie Royale des Sciences, pendant l'année 1816.

PARTIE PHYSIQUE.

PAR M. LE CH^ER CUVIER, SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

En rendant à la Classe des Sciences de l'Institut un nom que près d'un siècle de travaux utiles avait illustré, en lui permettant de s'associer des personnes qui, sans faire des sciences leur profession habituelle, s'honorent de les connaître et de les servir, le Roi a daigné conserver à cette compagnie l'organisation qu'elle avait reçue dans ces derniers temps, et dont une expérience déja suffisamment constatée a si bien montré les avantages. Exempts, dès leur entrée, de toute dépendance et de toute humiliation, sans crainte de voir altérer cette union que l'amour commun de l'étude entretient si naturellement, les Académiciens continueront de cultiver chacun avec zèle les parties du grand do-

maine scientifique qu'ils se sont distribuées, et de soumettre au jugement de leurs confrères les fruits qu'ils auront recueillis; nos analyses, comme leurs travaux, conserveront donc l'ancienne forme, et celle que nous offrons aujourd'hui au public se rattachera sans interruption aux précédentes.

Espérons que la paix, les communications qu'elle ouvre, et l'émulation qu'elle excite, ne feront qu'en rendre le contenu de plus en plus intéressant.

PHYSIQUE ET CHIMIE.

On sait que les divers corps, et spécialement les divers liquides se dilatent par la chaleur, selon des proportions très-différentes. M. Gay-Lussac a cherché à découvrir quelque loi qui indiquât la règle de ces rapports; pour cet effet, au lieu de comparer les dilatations des divers liquides au-dessus et au-dessous d'une température uniforme pour tous, il est parti d'un point, variable quant à la température, mais uniforme quant à la cohésion des molécules; du point où chaque liquide entre en ébullition sous une pression donnée, et parmi ceux qu'il a essayés, il en a trouvé deux qui, à partir de ce point, se dilatent également; ce sont l'alcool et le sulfure de carbone qui bouillent, le premier, à 78°. 41; le second, à 46°. 60, tandis que d'autres liquides ne présentent pas, à cet égard, la même ressemblance. Cherchant alors les autres analogies des deux liquides en question, M. Gay-Lussac a reconnu qu'ils se ressemblent encore en ce point, qu'un même volume de chacun d'eux à la température qui le fait bouillir, donne, sous la même pression, un même volume de vapeur, ou en d'autres termes, que les densités de leurs vapeurs sont entre elles comme celles des liquides à leurs températures respectives d'ébullition.

M. Gay-Lussac promet de donner suite à ses expériences, et

de présenter bientôt des recherches plus complètes sur la dilatation des liquides et sur leur capacité pour le calorique, comparées à celles de leurs vapeurs.

Parmi les questions délicates dont s'occupe aujourd'hui la chimie, on doit ranger principalement celle des proportions selon lesquelles les élémens peuvent s'unir pour former les combinaisons des divers degrés. On a cru remarquer dans ces derniers temps qu'il y avait certaines limites affectées de préférence par la nature, et exprimées par des termes généralement simples; et d'après les recherches de M. Gay-Lussac, cela est sur-tout vrai pour les combinaisons des gaz, quand on a égard non pas à leur poids absolu, mais à leur volume sous une pression égale.

Ces sortes de recherches sont sujettes à de grandes difficultés, parce qu'il n'est pas toujours possible d'obtenir les combinaisons isolées, et que, lorsqu'on veut les extraire des sels dont elles font partie, elles se décomposent ou s'altèrent par le mélange des autres principes de ces sels, ou de l'eau qui y entre presque toujours.

C'est ainsi que l'on peut expliquer les différences notables des résultats de MM. Davy, Dalton, et Gay-Lussac, touchant les combinaisons de l'azote et de l'oxygène.

Des expériences présentées cette année à l'Académie par M. Gay-Lussac, il résulterait que le gaz nitreux contient un volume d'azote et un volume égal d'oxygène sans condensation; que dans certaines circonstances il se forme une combinaison d'un volume d'azote contre un volume et demi d'oxygène, à laquelle M. Gay-Lussac donne le nom d'*acide pernitreux*; que l'acide nitreux ordinaire se compose d'un volume d'azote contre deux volumes d'oxygène; enfin qu'il y a dans l'acide nitrique un volume d'azote et deux volumes et demi d'oxygène.

Parmi ces différentes variétés, si l'on peut s'exprimer ainsi, des oxides ou acides qui ont l'azote pour radical, il s'en trouve

une que l'on obtient de la distillation du nitrate neutre de plomb préalablement desséché. C'est un liquide très-volatil, de couleur orangée. M. Gay-Lussac le regardait comme l'acide nitreux dont les élémens seraient maintenus par l'action de l'eau qui en ferait partie; mais M. Dulong s'est assuré, par des procédés d'analyse fort exacts, qu'il ne contient point d'eau, et le nomme par cette raison acide nitreux anhydre. Son résultat a été confirmé par la synthèse. Un volume de gaz nitreux, et un peu plus de deux volumes de gaz oxygène, soumis à un froid artificiel de vingt degrés donnent cet acide qui, entre autres propriétés, change de couleur, non-seulement par son mélange avec l'eau, mais par la chaleur; incolore à 20° au-dessous de zéro, il devient orangé à 15° au-dessus, et presque rouge à 28°. Quatre parties de gaz nitreux et une partie de gaz oxygène, condensées de même par le froid, ont donné un liquide d'un vert foncé beaucoup plus volatil que le précédent, que M. Dulong regarde comme un simple mélange d'acide nitreux et d'un autre acide où la proportion du gaz nitreux serait beaucoup plus forte.

M. Dulong a examiné aussi les proportions selon lesquelles l'oxygène se combine avec le phosphore, pour former des acides. Avant lui, on n'en admettait que deux; ses recherches lui font penser qu'il en existe quatre. Celle où il entre le moins d'oxygène s'obtient en jetant dans l'eau un phosphure alcalin; il se dégage de l'hydrogène phosphuré, et l'oxygène de l'eau forme avec le phosphore restant un acide qui demeure combiné avec l'alcali, et qu'on en expulse par l'acide sulfurique. M. Dulong le nomme *hypophosphoreux*, mais il croit que son radical se compose en partie d'hydrogène.

Un second acide, auquel M. Dulong transfère le nom de *phosphoreux*, s'obtient au moyen de la décomposition de l'eau par la combinaison de chlore et de phosphore au minimum, décomposition d'où il résulte deux acides, savoir, l'hydrochlorique ou

muriatique, et celui dont nous parlons. M. Dulong le juge composé de 100 parties de phosphore et de près de 75 d'oxygène.

Le troisième acide est celui qui se produit par la combustion lente du phosphore dans l'air. Il se décompose, lorsqu'on le sature, en acide phosphorique et en acide phosphoreux; et donne à-la-fois des phosphites plus solubles et des phosphates qui le sont moins. Toutefois, M. Dulong ne le regarde pas comme un simple mélange, mais plutôt comme une combinaison de ces deux acides, qui aurait quelque ressemblance avec les combinaisons salines, et où l'acide phosphoreux ferait fonction de base. D'après cette opinion, il propose de le nommer *phosphatique*, pour rappeler l'analogie qu'il aurait avec les phosphates.

Le dernier terme de l'oxygénation est l'acide phosphorique : la proportion du phosphore à l'oxygène y est de 100 à 124. On l'obtient de la combustion vive du phosphore, ou de la décomposition de l'eau par le chlorure de phosphore au maximum, et encore de plusieurs autres manières. Il est identique avec celui qu'on retire des os des animaux.

Trois chimistes hollandais, MM. van Marum, Deyman, et Paëts van Troostwick, firent connaître, en 1796, un gaz composé d'hydrogène et de carbone, qu'ils nommèrent gaz oléfiant, par la raison que sa propriété la plus singulière était de former un liquide huileux par son mélange avec le gaz muriatique oxygéné. D'après la théorie que l'on avait alors sur le gaz acide muriatique oxygéné, on devait croire que son oxygène s'unissait à l'hydrogène carboné, et donnait ainsi une sorte d'huile; mais aujourd'hui que l'on est venu à regarder ce gaz comme un corps simple, auquel M. Davy a donné le nom de chlore, on est obligé de chercher une autre explication. MM. Robiquet et Colin s'en sont occupés. Ils ont reconnu qu'en faisant arriver lentement dans un ballon un volume de gaz oléfiant et deux volumes de chlore, ils se convertissent entièrement et sans résidu, en liquide hui-

leux; lequel, décomposé par le feu, donne de l'hydrogène non saturé de carbone, un dépôt de carbone, et beaucoup de gaz muriatique, c'est-à-dire, d'après la théorie nouvelle, de gaz hydro-chlorique; le chlore entre donc en substance dans le liquide huileux. Mais y est-il comme chlore, et uni directement à l'hydrogène surcarboné? ou bien s'y trouve-t-il uni à l'hydrogène, et comme acide hydro-chlorique, ou, autrement, muriatique? C'est à la première de ces conclusions que les auteurs sont conduits, par des inductions tirées de la pesanteur spécifique des composans, et du composé, tandis que l'éther muriatique, qui a de nombreux rapports avec ce liquide huileux, leur paraît au contraire formé de l'union du gaz hydro-chlorique avec l'hydrogène carboné.

M. Chevreul continue toujours de travailler, avec le même zèle, à son Histoire chimique des corps gras. Nous avons dit d'après lui, dans le temps, comment la graisse de porc se compose de deux principes: l'un plus consistant, l'autre plus liquide; comment l'action des alcalis en altère la combinaison, en sépare un principe nouveau analogue au corps doux de Scheele, et y occasionne la formation de deux autres principes de nature acide, avec lesquels l'alcali se combine pour former le savon; nous avons exposé l'affinité diverse des alcalis et des terres avec ces deux acides, et les capacités de saturation de ces derniers; enfin nous avons rendu compte de l'examen comparatif fait par M. Chevreul, de divers corps plus ou moins analogues à la graisse: tels que le calcul biliaire, le spermacéti, l'adipocire des cadavres, et des différences essentielles qui les caractérisent. Dans un Mémoire présenté à l'Académie cette année, ce laborieux chimiste a commencé à rechercher les causes auxquelles sont dues les consistances, les odeurs et les couleurs particulières à quelques huiles et à quelques graisses; et il s'est occupé des graisses d'homme, de bœuf, de mouton, de jaguar et d'oie. Les variétés

de consistance tiennent à la proportion des deux principes généraux des corps gras; mais les autres différences dépendent de principes particuliers et étrangers. M. Chevreul propose un système de nomenclature analogue au reste de la nomenclature chimique, tant pour les principes qu'il a découverts que pour leurs combinaisons salines. Les deux principes de la graisse devront se nommer stéatine et élaïne, d'après les mots grecs qui signifient suif et huile. Son principe acide le plus consistant, ou sa margarine, sera l'acide margarique; l'autre, l'acide élaïque. Le spermacéti aura le nom de cétine, etc. Sans doute ces noms chargeront la mémoire, mais c'est un inconvénient inséparable des progrès de la science; et des périphrases qui allongeraient le discours sans le rendre plus clair, auraient des inconvéniens non moins graves.

MINÉRALOGIE ET GÉOLOGIE.

Le Groënland a fourni, depuis quelques années, une pierre en petits cristaux dodécaëdres d'un vert-céladon, que l'on a nommée SODALITE, parce qu'elle contient près d'un quart de son poids de soude unie avec de la silice et de l'alumine.

M. le comte Dunin-Borkowsky, gentilhomme gallicien et minéralogiste aussi zélé qu'instruit, a découvert une variété incolore et en gros prismes de cette même pierre, dans cette partie de la pente du Vésuve appelée *Fossa-Grande*, si célèbre par le nombre et la variété des minéraux qu'elle a offerts aux collecteurs. La composition de celui-ci, fort analogue à celle du verre, aurait pu frapper dans des cristaux rejetés par un volcan, s'ils n'étaient accompagnés d'une multitude d'autres espèces qui n'ont rien de commun avec le verre, et si les sodalites du Groënland ne se trouvaient pas dans des gisemens où l'on n'aperçoit nulle trace de feux souterrains.

La géologie, dans la forme scientifique à laquelle elle s'est élevée dans ces derniers temps, a moins pour objet d'imaginer, comme autrefois, des systèmes sur les états par où le globe a passé, que de décrire exactement son état actuel, et la position relative des masses qui composent son écorce. On sait que, sous ce dernier rapport, on a distingué ces masses, en primitives, c'est-à-dire dans lesquelles on ne voit point de traces de corps organisés, et que l'on croit antérieures à la vie; et en secondaires, qui toutes sont plus ou moins remplies des débris de ces corps, et qui doivent en conséquence avoir été formées depuis qu'ils existent. Ces masses sont en outre généralement différentes par leur nature et par les matières qui les composent; l'on a cru même long-temps que ces matières s'étaient succédées et remplacées d'une manière également tranchée, en sorte qu'aucune de celles qui se déposaient avant l'existence des corps organisés ne se serait déposée depuis, et réciproquement.

C'était là une assertion prématurée, que des observations plus exactes ont démentie. On s'est aperçu qu'entre ces deux genres de terrains il en existe de mélangés, en quelque sorte, où d'anciennes matières se reproduisent après que des matières nouvelles se sont montrées; où quelques corps organisés sont recouverts par des masses de la même nature que celles qu'on croyait avoir cessé de se déposer depuis que la vie s'était montrée sur le globe. Ces monumens du passage d'un état de chose à un autre ont été appelés terrains de transition.

Il n'est pas toujours facile de les reconnaître pour tels; et M. Brochant, dans un Mémoire publié il y a quelque temps, avait eu besoin de toute sa sagacité pour rappeler à cette classe intermédiaire les plus grandes portions de la vallée de Tarentaise, d'autant que l'on n'avait point découvert alors quelques coquilles dont l'existence dans ces roches a confirmé, de la manière la

plus flatteuse, les conjectures et les raisonnemens de ce savant géologiste.

Il a étendu depuis ce genre de recherches, et les a portées principalement, cette année, sur les gypses anciens qui se trouvent en abondance dans certaines parties des Alpes, et dont tous les voyageurs qui traversent le Mont-Cénis ne peuvent manquer de remarquer d'énormes masses. Après avoir décrit, avec une scrupuleuse exactitude, toutes les circonstances de leur gisement, et avoir souvent contourné, les montagnes, sur les flancs desquelles ils se présentent, l'auteur montre leurs rapports de situation et de nature avec les terrains de transition, et prouve que l'on doit les ranger dans cette classe.

Les terrains primitifs eux-mêmes ne sont pas toujours faciles à caractériser : l'irrégularité de leur position, l'énormité des espaces où il faut quelquefois poursuivre leurs rapports, et les variations nuancées de leur composition, offrent de grandes difficultés. Ainsi M. Brochant a reconnu, par de longs voyages et de pénibles examens, que les hautes cimes des Alpes, depuis le Mont-Cénis jusqu'au Saint-Gothard, et notamment le Mont-Blanc, ne sont point, comme on l'avait cru, de granit proprement dit, mais d'une variété plus cristalline et plus abondante en feld-spath, d'une roche talqueuse et feld-spathique qui domine dans une assez grande partie des Alpes, et qui contient souvent des minerais métalliques en couches; il s'est assuré, en même-temps, qu'un véritable terrain de granit règne sur la bordure méridionale de la chaîne; et, d'après l'analogie, il regarde comme très-vraisemblable que ce terrain granitique supporte le terrain talqueux; d'où il conclut que les hautes cimes des Alpes ne sont point la partie relativement la plus ancienne de ces montagnes.

Nous avons rendu compte, dans le temps, d'une disposition fort analogue, découverte dans les Pyrénées par M. Ramond.

L'on doit toutefois remarquer que la primordialité du granit,

parmi les roches connues, souffre des exceptions. M. de Buch a constaté en Norwége que des granits, évidemment reconnaissables pour tels, sont superposés à des terrains que l'on croyait plus modernes, et même à des terrains à pétrifications. Ce fait a été observé également en Saxe et jusques dans le Caucase.

M. de Bonnard, ingénieur des mines de France, qui, par une singularité honorable pour nous, a donné à la géologie la première description complète de l'Ertzgebürge, de cette province de Saxe qui est en quelque sorte la patrie de la géologie, M. de Bonnard s'est attaché, dans cet ouvrage, à déterminer les lieux où le granit est inférieur aux autres terrains et ceux où il est supérieur à quelques-uns. On ne peut douter, d'après ses recherches, que le granit de Dohna ne soit dans ce dernier cas, ainsi que l'avaient annoncé des observateurs saxons; mais, en d'autres endroits, et sur-tout près de Freyberg, on s'est trop empressé de conclure la supériorité du granit, de quelques irrégularités dans la forme de ses masses, dont les parties saillantes se ont quelquefois jour au travers des roches qui le recouvrent. Il paraît, au reste, que la chaîne qui sépare la Saxe de la Bohême a aussi les granits d'un côté de sa crête, du côté méridional.

Cet écrit de M. de Bonnard contient beaucoup d'autres détails précieux sur la nature et la position des terrains de la province célèbre qu'il a étudiée, ainsi que sur les riches filons métalliques qui la parcourent dans tous les sens, et sur lesquels l'industrie des mineurs s'exerce depuis si long-temps. Sous ces rapports, il est d'un égal intérêt pour la géologie et pour l'art de l'exploitation des mines.

M. Héron de Villefosse, aujourd'hui associé libre de l'Académie, a rendu à ce même art un bien grand service, par son ouvrage intitulé *de la richesse Minérale*. Le premier volume, qui avait pour objet l'administration des mines, imprimé dès 1810, est connu et apprécié depuis long-temps. Le second, où

il est traité de leur exploitation, a été présenté en manuscrit à l'Académie. L'auteur y réunit, à toutes les directions que donnent les sciences nombreuses d'où dérive la théorie, une immense quantité de faits pratiques qu'il a recueillis dans ses voyages et dans l'exercice de ses fonctions, en sorte que les préceptes y sont appuyés d'exemples qui n'ont rien d'imaginaire mais qui sont tous réalisés en quelques lieux. Un magnifique atlas offre à l'œil tout ce que ces exemples ont de sensible : on y voit des cartes géologiques du Hartz et de la Saxe, les pays les plus célèbres par l'ancienneté de leurs mines; des plans et des coupes de toutes les manières d'être du minerai dans le sein de la terre, ainsi que des voies que l'art a su ouvrir pour l'en retirer, et des mécaniques de tous genres que l'on emploie à cet effet, et presque tous ces matériaux sont inédits et rassemblés sur les lieux par l'auteur. On ne peut mettre en doute la grande utilité d'un tel ouvrage pour un pays où l'art dont il traite est encore si peu florissant.

La découverte si importante en géologie, faite par MM. Brongniart et Cuvier, de certaines couches pierreuses qui ne contiennent que des coquillages de terre et d'eau douce, et qui ne peuvent par conséquent avoir été formées dans la mer comme les autres couches coquillières, a excité de nombreuses recherches dans toute l'Europe. Nous avons rendu compte dans le temps de celles de MM. Marcel de Serres, et Daudebart de Férussac, sur les terrains d'eau douce de diverses contrées de France, d'Espagne, et d'Allemagne; on en a fait d'analogues et fort étendues en Angleterre. Cette année, M. Beudant, professeur à Marseille, a considéré cette matière sous un nouveau rapport. Comme on trouve en quelques endroits des coquilles d'eau douce mêlées à des coquilles marines, il a cherché à découvrir, par l'expérience, jusqu'à quel point les mollusques d'eau douce peuvent s'habituer à vivre dans l'eau salée, et réciproquement,

jusqu'à quel point les mollusques marins peuvent supporter l'eau douce. Il a trouvé que tous ces animaux meurent promptement quand on change subitement leur séjour, mais qu'en augmentant par degrés la salure de l'eau pour les uns, et en la diminuant par degrés pour les autres, on les habitue, pour la plupart, à vivre dans une eau qui ne leur est pas naturelle. Quelques espèces résistent cependant à ces tentatives, et ne supportent point de variations dans l'eau qu'elles habitent.

La nature indiquait d'avance ces résultats; certaines huîtres, certaines cérites, la moule commune, remontent assez haut dans les fleuves, et l'on voit quelques limnées dans des endroits où l'eau participe beaucoup de la salure de la mer.

M. Marcel de Serres a donné la suite de ses premières recherches sur ces terrains d'eau douce, dont nous avons rendu compte dans notre analyse de 1813. Il a fait connaître principalement, cette année, une formation de ce genre, qu'il regarde comme plus nouvelle que toutes les autres, et qu'il a découverte dans sept lieux différens des environs de Montpellier. Ses observations se rattachent en partie à celles de M. Beudant : il distingue les espèces des environs de Montpellier en celles qui ne paraissent pouvoir vivre que dans les eaux douces; celles qui peuvent subsister dans des eaux saumâtres, dont le maximum est de 2° 75; enfin celles à qui les eaux marines paraissent nécessaires. Il explique par-là quelques mélanges fort rares des débris de ces êtres.

Le terrain qu'il décrit se compose d'abord en quelque sorte de deux étages renfermant des coquilles différentes. Le supérieur en contient de terrestres en même temps que d'aquatiques. La formation nouvelle est appliquée à la surface de terrains divers, et principalement sur le haut des collines ou des plateaux. On y voit beaucoup de coquilles terrestres et d'empreintes de végétaux parfaitement semblables aux espèces qui vivent actuellement sur le même sol.

A mesure que l'on approfondit en Europe les méthodes d'observation géologique, il se trouve des naturalistes zélés qui les appliquent aux pays plus éloignés, et qui y retrouvent la nature fidèle aux mêmes lois.

Nous avons parlé plusieurs fois des immenses travaux de M. de Humboldt sur la structure et l'élévation respective des montagnes des deux Amériques. Ce savant voyageur a semblé préluder à des travaux non moins importants par un tableau des résultats obtenus dans l'Inde, sur la hauteur de divers pics de cette immense chaîne connue des anciens sous le nom d'Imaüs, et où les Indous ont placé les principaux faits de leur mythologie.

D'après les mesures trigonométriques de M. Webb, ingénieur anglais, quatre de ces pics seraient plus élevés que le Chimborasso, et l'un d'eux, la plus haute montagne connue jusqu'à ce jour sur le globe, aurait 4013 toises, ou 7821 mètres; et même, selon d'autres calculs, 4201 toises, ou 8187 mètres.

M. de Humboldt fait dans ce Mémoire un usage heureux des lois de la géographie végétale, pour suppléer aux mesures de hauteur de certains plateaux que l'on n'a point encore pu prendre immédiatement; et, lorsque telle ou telle plante se cultive dans un lieu, il détermine, d'après la latitude, quelle hauteur le plateau sur lequel ce lieu se trouve ne peut avoir dépassée. Ce sera un sujet curieux de vérification pour les voyageurs, qui, d'après les nombreux rapports qui s'établissent, vont sans doute, de plus en plus, visiter ces vallées et ces montagnes de l'Imaüs, ce Thibet, ce Boutan, ce Népaul, les contrées les plus intéressantes peut-être du monde pour l'histoire du genre humain, si comme tout l'annonce c'est de-là que notre race est descendue.

Dans un espace plus borné, M. Moreau de Jonnès, nommé depuis peu correspondant, n'a pas laissé que de faire des obser-

vations utiles. Il a présenté à l'Académie une carte géologique d'une partie de la Martinique où sont marquées, avec un grand soin, les hauteurs des montagnes et des collines qui la hérissent, et principalement celle du volcan éteint qui paraît avoir donné naissance à ces inégalités qu'il domine.

L'auteur a étendu ses recherches à la géologie d'une grande partie de Antilles. Des pics volcaniques occupent les centres élevés de ces îles, et se nomment mornes; les crêtes de laves qui en sont découlées s'appellent barres, et l'on désigne par la dénomination de plainiers les plateaux qu'elles ont formés en s'étalant à leur partie inférieure.

Les îles où il ne se trouve qu'un pic et un seul système de déjections, telles que Saba, Nièves, Saint-Vincent, sont plus petites, moins importantes pour l'agriculture. Elles n'ont point de bons ports, parce que ces ports ne sont que l'extrémité des vallées laissées entre deux ou plusieurs systèmes, tels qu'il s'en voit à la Guadeloupe, à la Martinique, à la Dominique, à Sainte-Lucie, à la Grenade, etc.; la Martinique, en particulier, paraît devoir son origine à six foyers volcaniques, et montre encore six pics auxquels tout son terrain se rapporte. C'est la topographie et la minéralogie exactes de l'un des six, celui de la montagne Pelée, que nous donne M. de Jonnès. Il croit cette nature volcanique si générale, qu'il suppose qu'elle sert de base même à celles des Antilles, qui n'offrent à l'extérieur que des calcaires manifestement coquilliers, telles que la Barbade, et la grande terre de la Guadeloupe. La Guadeloupe proprement dite est formée de quatre systèmes d'éruption, un desquels, la *Soufrière*, a conservé encore quelque activité. M. de Jonnès en donne aussi une description soignée dans une statistique générale de cette île.

BOTANIQUE ET PHYSIQUE VÉGÉTALE.

Une des considérations les plus élevées de la botanique, et qui lie plus qu'aucune autre cette partie de l'histoire naturelle au grand ensemble des sciences physiques, c'est la géographie végétale, ou la science des lois de la distribution des plantes selon la hauteur du pôle, l'élévation du sol, la température et le degré d'humidité ou de sécheresse du climat.

M. de Humboldt, dont les voyages ont fait faire à cet ordre de connaissances comme à tant d'autres des progrès si remarquables, vient d'en donner en quelque sorte un traité complet sous le titre de *Prolegomena de distributione geographica plantarum secundum cœli temperiem et altitudinem montium* (1), ouvrage où il offre en même temps des recherches profondes sur la distribution de la chaleur, soit relativement aux positions des lieux, soit relativement aux saisons de l'année; car, non-seulement les lignes sous lesquelles règne la même chaleur annuelle moyenne sont loin d'être parallèles à l'équateur, mais les lieux qui ont au total une chaleur moyenne égale, sont loin d'avoir des étés et des hivers semblables; cette chaleur moyenne peut-être plus ou moins inégalement répartie sur la totalité de l'année, et l'on conçoit que toutes ces différences doivent influer fortement sur la propagation des plantes. L'auteur passe ensuite aux différences qui résultent des élévations, et qui elles-mêmes ne sont pas semblables ou ne suivent pas les mêmes lois dans tous les lieux; enfin M. de Humboldt arrive à une considération toute nouvelle, sur laquelle il a aussi donné une dissertation en français : c'est celle des lois de la distribution des formes végétales. En comparant,

(1) Paris, 1817. Un volume in-8°.

dans chaque pays, le nombre des plantes de certaines familles bien déterminées avec le nombre total des végétaux, on découvre des rapports numériques d'une régularité frappante. Certaines formes deviennent plus communes à mesure qu'on avance vers le pôle; d'autres au contraire augmentent vers l'équateur; d'autres enfin atteignent leur maximum dans la zone tempérée et diminuent également par le trop de chaleur et le trop de froid; et, ce qui est bien remarquable, cette distribution reste la même tout autour du globe en suivant, non pas les parallèles géographiques, mais ce que M. de Humboldt appelle les parallèles isothermes, c'est-à-dire les lignes de même chaleur moyenne. Ces lois sont si constantes que, si l'on connaît dans un pays le nombre des espèces d'une de ces familles dont M. de Humbolbt a donné la table, on peut presque en conclure le nombre total des végétaux et celui des espèces de chacune des autres familles.

Les prolégomènes dont nous venons de parler sont placés en tête du grand ouvrage que M. de Humboldt publie en ce moment avec MM. Bonpland et Kunth, sur les plantes nouvelles qu'il a découvertes dans l'Amérique équinoxiale. Cette augmentation, la plus riche et la plus brillante peut-être que la botanique ait reçue en une seule fois, sera exposée en six volumes in-4° qui contiendront six cents planches, et les descriptions de plus de quatre mille espèces. Le premier volume, renfermant toutes les monocotylédones, a paru cette année; on y trouve trente-trois nouveaux genres, et parmi les seuls palmiers vingt-trois espèces nouvelles. MM. de Humboldt et Bonpland ont fait paraître en même temps la fin de leur description des Mélastomes, travail d'un extérieur plus magnifique, mais qui n'aurait pu être imité pour la totalité des végétaux sans entraîner à des dépenses et à des longueurs préjudiciables à la science autant qu'à ceux qui la cultivent.

En recueillant ainsi sans interruption les produits immenses

de la grande et pénible entreprise de cet illustre voyageur, les amis des sciences sont en doute s'ils doivent plus de reconnaissance au courage qui l'a soutenu parmi tant de traverses et de fatigues, ou à la constance qu'il met à leur faire partager ses jouissances. Non-seulement il a fait par ses seuls moyens plus que bien des hommes envoyés et spécialement entretenus par des souverains, mais il a eu sur-tout le mérite unique de ne pas imiter la plupart des gouvernemens qui, après avoir consacré des sommes immenses à une expédition, négligent presque toujours d'en faire publier les résultats d'une manière un peu complète.

En ce moment même M. de Humboldt fait paraître à Londres, avec M. Hoorner, un volume in-4° qui offrira trois cents espèces de mousses, de lichens, et d'autres cryptogames. Il en a présenté une planche à l'Académie.

M. de Beauvois, dont on doit également louer la persévérance à publier les plantes et les insectes recueillis dans ses voyages, a donné cette année les quatorzième et quinzième livraisons de sa *Flore d'Oware et de Benin;* et, non content de ces anciennes récoltes, il a profité de l'humidité extraordinaire et si fâcheuse de cette année pour suivre son étude des plantes de la classe des champignons. Les pluies continuelles en ont tant développé, qu'il s'en est montré plusieurs qui avaient échappé aux botanistes précédens, même les plus heureux dans ces sortes de découvertes. Telles ont été : une variété de sclerotium qui a diminué de près des deux tiers la récolte des haricots non ramés, sur lesquels elle s'est propagée ; une nouvelle espèce de sphéria, qui a détruit prodigieusement d'oignons ; une nouvelle espèce d'urédo, qui leur a été encore plus pernicieuse ; enfin ce qui est très-remarquable et offre peu d'exemples dans le règne végétal, un nouveau genre de plantes parasites qui croit sur une autre parasite et nuit considérablement au végétal obligé

de les nourrir toutes deux. C'est une espèce de tubercule qui se fixe au-dessus de la racine de l'orobanche rameuse que l'on sait être la parasite du chanvre. Ce tubercule présente des caractères qui le rapprochent des truffes et des sclérotium, mais avec des différenees qui le constituent genre nouveau et intermédiaire. Se proposant de répéter ses observations l'année prochaine sur cette plante très-remarquable, M. de Beauvois a remis à cette époque à lui assigner un nom, après avoir mieux reconnu sa manière de croître et tous les détails de son organisation.

On sait que les plantes de la famille des dipsacées, telles que les scabieuses, sont assez voisines des composées par plusieurs des caractères de leurs fleurs et de leurs fruits; la marque la plus apparente qui les en distingue, est que les anthères sont entièrement libres. Les botanistes ont découvert quelques plantes à fleurs également formées de plusieurs fleurs plus petites, dont les anthères sont réunies par leur partie inférieure seulement. On doutait de la place qu'il fallait leur donner: M. Henri de Cassini, qui les a examinées à la suite de son grand travail sur la famille des synanthérées ou composées, dont nous avons eu plusieurs fois occasion de parler, a trouvé qu'elles diffèrent des synanthérées parce que leurs anthères n'ont point d'appendices au sommet; parce que leur style et leur stigmate ont une autre conformation; parce que la graine est suspendue au sommet de la cavité de l'ovaire, et contient un albumen épais et charnu. Elles diffèrent des dipsacées par les anthères réunies inférieurement, par leurs feuilles alternes: mais la plupart de leurs autres caractères leur sont communs avec ces deux familles. En conséquence, M. de Cassini croit qu'on peut en faire une famille distincte qui servira de lien aux deux autres, et qu'il désigne par le nom de *boopidées*. Elle comprendra les genres *calycera* de *cavanilles*, *boopis* et *lacicarpha* de M. de Jussieu.

Nous avons annoncé, l'année dernière, l'opinion de M. de

Candolle, sur cette substance nuisible que l'on appelle *ergot*, et qui se montre dans les épis du seigle et de quelques-autres céréales, sur-tout dans les pays et par les temps humides. L'année 1816 en a malheureusement beaucoup produit, et M. Virey a fait, sur ce sujet, quelques recherches qui le portent à regarder l'ergot, ainsi qu'on le faisait autrefois, comme une dégénérescence du grain, et non pas comme un champignon du genre *sclerotium*, ainsi que le croyait M. de Candolle. Il dit avoir observé des grains ergotés qui non-seulement avaient conservé leur forme naturelle, mais où l'on voyait encore des débris de stigmates; et il rappelle l'assertion de M. Tessier, que l'on observe sur beaucoup d'épis des grains qui ne sont ergotés qu'à moitié, et tantôt vers le sommet, tantôt vers la base.

M. Vauquelin a fait à cette occasion une analyse comparative du seigle sain, de l'ergot de seigle, et d'un sclerotium bien reconnu pour tel.

On ne trouve dans l'ergot ni l'amidon ni le gluten dans leur état naturel, quoiqu'il y ait une matière muqueuse et une matière végéto-animale abondante et disposée à la putréfaction. Il contient une huile fixe toute développée. Les principes du sclerotium sont fort différens. Sans être décisives, ces expériences ont porté quelques personnes à douter, comme M. Virey, que l'ergot soit un champignon.

M. Gail, membre de l'Académie des Belles-Lettres, nous a communiqué quelques recherches critiques sur les plantes dont parle Théocrite. Elles ont moins pour objet de déterminer autrement l'espèce de ces plantes que d'expliquer comment Théocrite a pu leur donner certaines épithètes ou en tirer certaines comparaisons: elles rentrent donc autant dans la philologie que dans la botanique, et le public les connaîtra plus en détail par l'analyse des travaux de l'Académie, à laquelle appartient ce célèbre helléniste.

ZOOLOGIE, ANATOMIE, ET PHYSIOLOGIE ANIMALE.

Les animaux ont aussi leur géographie, car la nature en retient aussi chaque espèce dans certaines limites, par des liens plus ou moins analogues à ceux qui arrêtent l'extension des végétaux. Zimmerman a donné autrefois sur la répartition des quadrupèdes, un ouvrage qui n'a pas été sans célébrité. M. Latreille vient d'en publier un sur celle des insectes. On sent qu'elle doit avoir des rapports intimes avec celle des plantes; et en effet, l'on retrouve de même sur les montagnes d'un pays plus chaud, les insectes qui habitent les plaines d'un pays plus froid. Les différences de dix à douze degrés en latitude amènent toujours, à hauteur égale, des insectes particuliers; et, quand la différence est de vingt à vingt-quatre, presque tous les insectes sont différens. On observe des changemens analogues correspondans aux longitudes, mais à des distances beaucoup plus considérables.

L'ancien et le nouveau monde ont des genres d'insectes qui leur sont propres, et les espèces, même de ceux qui sont communs à l'un et à l'autre, présentent des différences appréciables. Les insectes des pays qui enclavent le bassin de la Méditerranée, et ceux de la mer Noire et de la mer Caspienne ; les insectes encore d'une grande partie de l'Afrique, ont beaucoup d'analogie entre eux. Ces contrées forment sur-tout le domaine des coléoptères qui ont cinq articles aux quatre tarses antérieurs et un de moins aux deux derniers. L'Amérique nous offre, outre les genres qui lui sont propres, un très-grand nombre d'insectes herbivores : tels que *chrysomèles*, *charansons*, *cassides*, *capricornes*, *papillons*, etc. Ceux de l'Asie, au-delà de l'Indus, ont une grande affinité, quant aux familles et aux genres dont ils

font partie. Les espèces de la Nouvelle-Hollande, quoique voisines de celles des Moluques s'en éloignent néanmoins par des caractères essentiels. Les îles de la mer du Sud et l'Amérique méridionale semblent laisser entrevoir, à cet égard, quelques rapports généraux, tandis que l'entomologie de l'Afrique contraste essentiellement, en plusieurs points, avec celle de l'Amérique méridionale.

Dans l'Europe occidentale, le domaine des insectes méridionaux se manifeste très-sensiblement, dès qu'en allant du nord au midi on parvient aux pays favorables à la culture de l'olivier. La présence du *bousier sacré* et des *scorpions* annoncent ce changement remarquable de la température; mais il ne s'opère, dans l'Amérique boréale, qu'à une latitude plus rapprochée de l'équateur d'environ cinq à six degrés. La forme du nouveau continent, la nature de son sol et de son climat, produisent cette différence.

M. Latreille expose ensuite une nouvelle division de la terre par climats. Le Groënland, quoique très-voisin de l'Amérique, paraît cependant, d'après la faune qu'en a donnée Othon Fabricius, se rapprocher davantage, à cet égard, de l'Europe septentrionale et occidentale. On peut du moins considérer le Groënland comme une terre intermédiaire entre les deux Mondes. D'après ce motif, M. Latreille le prend pour point de départ d'un premier méridien, qui, passant 34° à l'ouest de celui de Paris, se prolonge dans l'Océan atlantique, et se termine à la Terre de Sandwich, au 60° de latitude sud, le *nec plus ultrà* de nos découvertes vers le pôle antarctique. Ce méridien, à partir du 84° de latitude nord, dernier terme approximatif de la végétation, et ensuite, au-delà, jusqu'au 60° de latitude sud, est coupé de douze en douze degrés, par des cercles parallèles à l'équateur. Les intervalles forment autant de climats que M. Latreille désigne sous les noms de *polaire*, *sous-polaire*, *supérieur*,

intermédiaire, *sur-tropical*, *tropical*, et *équatorial*. Mais, comme les insectes de l'Amérique diffèrent spécifiquement de ceux de l'ancien continent, et qu'à commencer au bassin de l'Indus, les insectes de l'Asie orientale semblent s'éloigner, sous plusieurs rapports généraux, de ceux des parties occidentales, M. Latreille divise d'abord les deux hémisphères par un autre méridien, qu'il fixe à 182° degrés à l'est de celui de Paris, et partage ensuite chaque continent en deux grandes portions, au moyen de deux autres méridiens : l'un est de 62° plus oriental que celui de Paris, et passe sur les limites occidentales du bassin de l'Indus; l'autre coupe l'Amérique à 106° à l'ouest du méridien de Paris, et détache la partie de ce continent qui est la plus rapprochée géographiquement, et peut-être quant aux productions naturelles, de l'Asie. Les deux hémisphères sont ainsi partagés longitudinalement en deux zones, l'une orientale, et l'autre occidentale.

Tout Paris a pu voir une femme venue du Cap-de-Bonne-Espérance, que l'on montrait au public, sous le nom de *Vénus hottentotte*. Elle appartenait à une nation de l'intérieur de l'Afrique, célèbre chez les colons du Cap par sa férocité, et que l'aridité des cantons qu'elle habite et les persécutions des peuples du voisinage contribuent également à réduire à l'état le plus misérable. La petitesse de leur taille, les formes particulières de leur tête, la couleur jaune de leur peau, et sur-tout l'énorme saillie des fesses dans les femmes, semblent en faire une race bien distincte des nègres et des cafres dont ils sont entourés. On a sur-tout beaucoup parlé du tablier de ces mêmes femmes, que les premiers voyageurs avaient d'abord représenté fort inexactement, et dont quelques voyageurs plus récens ont été jusqu'à nier l'existence.

La personne dont nous parlons étant morte à Paris, M. Cuvier a eu occasion de la disséquer, et de constater les particularités

de son organisation. Elle possédait le tablier; mais ce n'est ni un repli de la peau du ventre, ni un organe particulier: c'est seulement une production considérable de la partie supérieure des nymphes, qui tombe devant l'ouverture de la vulve, et la couvre entièrement. Les proéminences des fesses ne se composent que d'un tissu cellulaire rempli de graisse, à-peu-près comme les bosses des chameaux et des dromadaires. Le squélette n'en conserve point de marque, si ce n'est un peu plus de largeur et d'épaisseur aux bords du bassin. La tête offrait un mélange singulier des caractères du nègre et de ceux du calmouque; enfin, les os des bras, remarquables par leur minceur, offrent quelques rapports éloignés avec ceux de certains singes.

Un des reptiles venimeux les plus redoutables, après le serpent à sonnette, c'est la vipère jaune, ou fer-de-lance de la Martinique et de Sainte-Lucie, sur laquelle M. Moreau de Jonnès a lu à l'Académie un Mémoire intéressant. Les naturalistes la placent aujourd'hui dans le genre des *trigonocéphales*, caractérisé par les fossettes situées derrière les narines. Elle remplit la principale des colonies qui nous restent. Quelques-uns prétendent qu'elle y fut autrefois apportée, en haine des caraïbes, par les arrouages, peuplade des bords de l'Orénoque: tradition qui expliquerait peut-être comment elle est restée étrangère aux autres Antilles. Depuis les bords de la mer jusqu'au sommet des Mornes, l'on est exposé à ses atteintes; mais son principal refuge est dans les champs de cannes à sucre, où des multitudes de rats lui servent de pâture, et où elle se propage avec une abondance proportionnée au nombre de ses petits, qui est de cinquante à soixante par portée. Sa longueur va quelquefois à plus de six pieds. On a cherché en vain jusqu'à-présent à détruire ces vipères, en les faisant poursuivre par des chiens terriers de race anglaise. M. Jonnès propose d'essayer contre elles cet oiseau

de proie à hautes jambes, appelé *messager* ou *secrétaire* (*falco-serpentarius*, L.), qui dévore tant de serpens aux environs du Cap-de-Bonne-Espérance; et l'administration a déja songé à faire transporter cette espèce utile à la Martinique. Peut-être la mangouste ne rendrait-elle pas de moindres services.

M. Cuvier a terminé par un Mémoire étendu, sur le poulpe, la seiche et le calmar, le travail qu'il avait entrepris depuis long-temps sur l'anatomie des mollusques. Les genres que nous venons de désigner sont les plus remarquables de cette nombreuse classe d'animaux, par la complication et les singularités de leur structure. Pourvus de trois cœurs, d'un système nerveux très-développé, de grands yeux aussi bien organisés que ceux d'aucun animal vertébré, de viscères excrétoires très-singuliers et formés sur un plan dont la nature n'offre pas d'autre exemple, ils méritaient toute l'attention des naturalistes.

L'auteur a réuni ce travail à tous ceux qu'il avait lus précédemment à l'Institut, sur des animaux de la même classe, pour en former un volume in-4°, orné de trente-six planches en taille douce, qui vient de paraître, sous le titre de *Mémoires pour servir à l'histoire et à l'anatomie des mollusques.*

En faisant ses recherches anatomiques sur les seiches, M. Cuvier a eu occasion de reconnaître la nature d'un fossile assez commun dans nos couches calcaires, et qui avait offert jusques-là une énigme indéchiffrable aux géologistes. C'est une partie osseuse, concave d'un côté, avec un rebord rayonnant, convexe du côté opposé, et armée d'une forte épine entre la convexité et le rebord. Il est démontré aujourd'hui que c'est l'extrémité inférieure d'un os de seiche; et, si l'on est étonné de quelque chose, c'est que l'on ne se soit pas aperçu plutôt d'un rapport aussi évident.

Les eaux douces de quelques cantons du midi de la France nourrissent un très-petit coquillage semblable à un bouclier surmonté d'un aiguillon pointu et recourbé. On l'avait cru uni-

valve, et on l'avait nommé l'*ancyle épine de rose;* mais M. Marcel de Serre vient de s'assurer que c'est une des valves d'un coquillage bivalve et régulier, dont la charnière a des caractères qui lui sont propres. En conséquence, il en fait un genre qu'il nomme *acanthis*. L'animal de cette coquille n'a pas encore été observé.

Les animaux sans vertèbres en général, considérés sous le rapport de la classification et de l'énumération des espèces, font l'objet d'un grand ouvrage dont M. de Lamarck vient de publier les trois premiers volumes in-8°. Commençant par les êtres et les simples, c'est-à-dire par les animaux microscopiques, l'auteur passe aux polypes, soit libres, soit soutenus par ces masses plus ou moins solides auxquelles on a donné le nom générique de *coraux*. Il en vient ensuite aux *radiaires*, classe dans laquelle il comprend les êtres mollasses vulgairement nommés *orties de mer*, et ceux à qui leur enveloppe, souvent épineuse, a fait donner le nom d'*échinodermes*.

Il fait une quatrième classe, qu'il appelle *tuniciers*, de ces mollusques composés dont M. Savigny nous a révélé, il y a un an, la singulière histoire, ainsi que des mollusques simples analogues à ceux dont la réunion forme ceux-là.

La cinquième classe comprend les vers intestinaux, auxquels l'auteur joint quelques vers des eaux douces, qui semblaient devoir rester parmi les annélides.

Son troisième volume se termine par une partie des insectes.

Le grand détail où M. Delamarck est entré, les espèces nouvelles dont il donne la description, rendent son livre précieux aux naturalistes, et doivent en faire desirer la prompte continuation, sur-tout d'après la connaissance que l'on a des moyens que cet habile professeur possède pour porter à un haut degré de perfection l'énumération qu'il nous donnera des coquilles, cette partie immense de l'histoire naturelle.

Quant à l'histoire des coraux, elle vient d'être enrichie du grand travail de M. Lamouroux, sur ceux de leurs genres dont la partie solide est flexible; travail que nous avons annoncé plusieurs fois dans nos analyses précédentes, et qui a paru cette année en un volume in-8°, avec dix-huit planches. On y prend connaissance d'un nombre vraiment effrayant d'espèces et de genres dont plusieurs, sous d'autres noms, se trouvent être les mêmes qu'a établis M. de Lamarck.

Le public jouit aussi maintenant, par la voie de l'impression, de l'Histoire des Crustacées de Nice, par M. Risso, et des belles Recherches de M. Savigny, sur la bouche des insectes et sur les mollusques composés. Ces derniers travaux sur-tout qui ouvrent à la science des vues toutes nouvelles, sont bien dignes de l'attention des naturalistes; mais, comme les uns et les autres avaient été précédemment communiqués à l'Académie, et que nous en avons déja donné des analyses, nous nous dispenserons d'y revenir.

Cette multiplication de jour en jour croissante des êtres animés que les naturalistes observent, la nécessité de mettre de temps en temps quelque ordre plus convenable dans leur distribution, et dans les caractères qu'on leur assigne, ont déterminé M. Cuvier à en reproduire l'ensemble, dans un ouvrage en quatre volumes in-8°, avec dix-huit planches, qu'il vient de publier, sous le titre de *Règne animal distribué d'après son organisation.*

Il a eu en même temps pour but de faire servir cet ouvrage d'introduction à la grande anatomie comparée qu'il prépare, et, pour cet effet, il y fait marcher de front les caractères intérieurs et extérieurs. Ses classes sont celles dont nous avons donné le tableau, il y a deux ans; mais ce que nous n'avons pu indiquer alors, et ce que nous ne pouvons indiquer aujourd'hui que d'une manière générale, c'est l'extrême division des genres en sous-genres et autres coupures inférieures, par où l'auteur croit être

arrivé à une précision telle que l'on ne peut presque plus hésiter sur la place d'une espèce. C'est sur-tout parmi les animaux vertébrés que ce travail était nécessaire et que l'auteur a mis beaucoup de soin à l'exécuter, en y joignant des recherches nombreuses et nouvelles sur les confusions de synonymies et sur tous les doubles emplois si communs dans les auteurs qui n'ont pas usé d'une extrême critique.

M. de Barbançois, correspondant, propose encore quelques changemens, ou plutôt quelques subdivisions ultérieures dans la distribution méthodique des animaux. Il ne voudrait pas que l'homme restât confondu avec les mammifères, et pense même que l'on pourrait en faire un quatrième règne de la nature, qu'il propose d'appeler le règne moral; il desirerait faire des reptiles visqueux ou batraciens, une classe distincte des reptiles écailleux; séparer les céphalopodes des autres mollusques; porter les mollusques cirrhipèdes à la tête des annélides, et introduire quelques arrangemens analogues dans les classes anciennes, que d'ailleurs il adopte.

Le grand objet de ces sortes de recherches est moins d'établir ou de multiplier des subdivisions que de ne jamais éloigner dans celles qu'on admet des êtres qui se ressemblent, ni rapprocher des êtres qui ne se ressemblent point. A cet égard M. de Barbançois ne conteste aucun des rapports reconnus par les naturalistes qui l'ont précédé.

Une des questions les plus intéressantes de la physiologie, c'est l'origine de l'azote qui fait un élément essentiel du corps animal. On soupçonnait bien que la respiration qui enlève le carbone et l'hydrogène du sang, en y laissant l'azote, contribue par-là même à augmenter la proportion définitive de celui-ci, mais on ne savait pas positivement si cet azote vient tout entier des alimens, ou si l'atmosphère n'en fournit pas aussi une partie, soit au travers du poumon dans la respiration, soit

par le moyen de l'absorption qui se fait à toute la surface du corps, ou enfin s'il ne s'y produit point par l'action même de la vie.

M. Magendie a voulu s'en assurer par des expériences, et pour cet effet il a nourri des chiens avec des substances qui ne contiennent point sensiblement d'azote, et principalement avec du sucre, de la gomme, de l'huile d'olive, du beurre, auxquels il ajoutait de l'eau distillée. Ces animaux ont tous fini par périr, mais avec des phénomènes très-singuliers; entre autres une ulcération de la cornée, qui a quelquefois percé cette membrane de manière que l'œil s'est vidé de ses humeurs. Leurs sécrétions prenaient le caractère de celles des herbivores; les principes contenant de l'azote y diminuaient de plus en plus; le volume des muscles était réduit au sixième; et ces suites fâcheuses ne provenaient pas du défaut de digestion, car les alimens non azotés donnent du chyle et remplissent les vaisseaux lactés, ils soutiennent la vie plus long-temps que si l'on refusait absolument la nourriture.

L'azote entre comme partie essentielle dans l'urée, et dans l'acide urique, ces élémens du calcul de la vessie, et ces matières diminuent sensiblement dans l'urine des animaux nourris de substances non azotées. M. Magendie en a conclu qu'au moyen d'un régime très-végétal on pourrait au moins ralentir les progrès de cette funeste maladie de la pierre. Il est vrai que le régime entièrement végétal donne quelquefois une maladie contraire, le diabétès sucré ou flux excessif d'une urine où abonde la substance sucrée, maladie que l'on guérit en se nourrissant de viande.

Ces faits peuvent devenir utiles en médecine, et donner des indications diététiques importantes.

M. Magendie a aussi fait, en commun avec M Chevreul, des essais pour déterminer la nature des gaz qui se développent au

moment de la digestion dans les diverses parties du canal alimentaire. Dans quatre suppliciés, qui avaient pris, un peu avant leur mort, des alimens déterminés, l'estomac a offert de l'oxigène, de l'acide carbonique, de l'hydrogène pur, et de l'azote; l'intestin grèle les trois derniers gaz, mais point d'oxigène; le gros intestin, enfin, joignait à de l'acide carbonique et à de l'azote, des gaz hydrogènes carbonés et sulfurés : ces deux derniers n'appartiendraient donc qu'aux gros intestins, l'oxigène se trouverait dans l'estomac seulement; l'azote et l'acide carbonique existeraient dans tout le canal, et la quantité de ce dernier augmenterait en descendant.

MÉDECINE ET CHIRURGIE.

Si l'ignorance en médecine est souvent dangereuse, elle n'est peut-être jamais plus terrible que dans les cas où, appelée à éclairer la justice, elle l'égare par des rapports inconsidérés et qui peuvent attirer sur l'innocence le supplice et la honte réservés au crime. Aussi l'ouvrage que M. Chaussier a entrepris sur la médecine légale, et qui a pour objet de faire concourir les lumières acquises par l'anatomie, la chimie, et la physiologie, à déterminer les causes de mort d'après l'inspection des cadavres, est-il d'un intérêt vraiment social. Aux règles générales que l'auteur prescrit, il ajoute comme exemples plusieurs rapports faits en justice sur des cas remarquables, et y joint ses remarques sur les omissions, les erreurs, les obscurités, les vices de raisonnement, qui ne se rencontrent que trop souvent dans ces pièces importantes.

Toute cette partie répond complètement à l'épigraphe du livre :

Sontibus inde tremor; civibus inde salus;

mais l'auteur ne s'est pas borné à ce que promet son titre. Il

a fait aussi remarquer des vices dans la manière ordinaire d'ouvrir les cadavres pour la simple anatomie pathologique, vices qui ont souvent conduit à de fausses conclusions touchant la nature et le siége des maladies; enfin la physiologie générale elle-même profitera d'une infinité de remarques délicates sur des fonctions peu étudiées que communique en passant ce savant physiologiste.

M. Moreau de Jonnès, qui a observé avec tans de soin la géologie des Antilles; ne s'est pas occupé avec moins de zéle de leur climat, de ses funestes effets sur la santé de Européens, et des moyens de prévenir ou de guérir une partie des maux qu'il occasionne. Il a sur-tout recherché par quelles règles d'hygiène il serait possible d'en préserver les troupes. Les précautions qu'il indique pour le débarquement, le logement, la nourriture, les marches des soldats, sont dictées par une sage théorie médicale, et la plupart ont déja été confirmées par l'expérience. Son ouvrage a été envoyé dans les colonies par ordre des ministres de la guerre et de la marine.

M. Boyer a donné un Mémoire précieux sur une maladie cruelle dont il a le premier découvert les moyens de curation. Il s'agit de certaines fissures qui surviennent à l'anus, et qui, accompagnées d'un état spasmodique de cette partie, occasionnent des douleurs inouies et des angoisses insupportables. Une incision au sphincter pratiquée avec soin, les fait cesser constamment et pour ainsi dire subitement.

M. Larrey est l'un des chirurgiens qui ont exercé leur art sur les théâtres les plus vastes et les plus variés; attaché aux armées françaises pendant vingt-cinq campagnes, ils les a suivies dans les quatre parties du monde, et a dirigé en chef le service chirurgical en Égypte et en Russie, aussi-bien que dans tous les climats intermédiaires; aux époques des victoires les plus brillantes et de la plus grande prospérité, comme à celles des de-

faites les plus affreuses et du dénuement le plus absolu. Aucune occasion ne lui a donc manqué, et il a profité de toutes.

Aux résultats de son expérience, déja consignés dans ses ouvrages publics, il a joint cette année des observations importantes sur les effets des corps étrangers introduits dans la poitrine, et sur les opérations qui ont pour but de les extraire. Lorsque des amas de pus ou de sang ont forcé les poumons de se contracter, l'expulsion de ces matières occasionne dans le thorax un vide que la nature tend à remplir, soit par une production de nouvelle substance, soit par le déplacement des côtes et de quelques autres des parties voisines. M. Larrey a fait voir ces changemens dans des individus qu'il a été possible d'ouvrir, parce que, depuis leur guérison, ils avaient succombé à d'autres accidens.

Il a présenté un sujet parfaitement guéri de l'extirpation de la cuisse dans son articulation supérieure, opération sur la possibilité de laquelle M. Larrey a fixé le premier l'opinion des praticiens, en faisant connaître le procédé à l'aide duquel on peut l'exécuter sûrement.

ÉCONOMIE RURALE, ET TECHNOLOGIE.

Le poil de castor, si nécessaire à la fabrication des chapeaux fins, devenant de plus en plus rare et cher, on a essayé de plusieurs autres poils, sans en trouver encore qui le pussent entièrement remplacer. M. Guichardière, fabricant de chapeaux à Paris vient d'employer avec succès à cet usage le poil de loutre marine et celui de loutre indigène. A la vérité, des chapeaux entièrement composés ainsi, seraient beaucoup trop chers, mais on peut avec profit glacer, ou, comme disent les chapeliers, dorer de ce poil des chapeaux dont le corps est formé d'un

poil plus commun. C'est ce que l'on pratique aussi depuis long-temps avec le poil de castor.

Nous devons encore placer au rang des ouvrages utiles qui ont occupé les membres ou les correspondans de l'Académie, pendant l'année 1816, l'Instruction de M. Huzard, sur les mesures à prendre par les nourrisseurs, pour désinfecter leurs étables et préserver leur bestiaux de l'épizootie; plusieurs articles d'agriculture, insérés par M. Yvart, dans le Nouveau Dictionnaire d'Histoire naturelle, et sur-tout l'article sur l'accouplement des animaux domestiques, qui a été lu à la compagnie; et l'Histoire de l'Agriculture Française, par M. Rougier de la Bergerie.

ÉLOGE

DE M. TENON.

Lu dans la Séance publique du 17 mars 1817.

L'UN des spectacles les plus nobles et les plus touchans qu'il nous ait été donné de contempler, n'est-ce pas celui de l'homme aux prises avec la fortune et avec la nature, et parvenant, à force de persévérance, à remporter sur l'une et sur l'autre des victoires durables. Tel a été, sous tous les rapports, le savant académicien dont j'ai à vous entretenir.

D'une complexion faible, condamné, presque dès l'enfance, à une vie courte et douloureuse, il a su se délivrer de toute infirmité, et vivre près d'un siècle sain de corps et d'esprit. Dépourvu, dans sa jeunesse, de moyens d'instruction, il a su s'en créer à lui-même, et il s'est élevé au rang de nos savans les plus illustres. Né dans la pauvreté, presque dans l'indigence, il a mieux fait que de s'enrichir : il est devenu, pour notre pays, l'un des principaux bienfaiteurs des pauvres, en améliorant les asyles du malheur; et, comme s'il eût dédaigné tout ce qui n'était que personnel dans ces avantages, une partie de sa vie a été employée à faire connaître aux autres les moyens d'atteindre aux mêmes résultats. A quatre-vingt-dix ans, il traçait, d'une main que l'âge n'avait point encore glacée, cette offrande aux vieillards, où il leur dicte, pour la conservation de leur santé, les leçons d'une expérience si concluante, et en mourant, il a légué à celui qu'il savait devoir être chargé d'écrire son éloge, des Mé-

moires sur sa vie, où il expose sans détour les diverses circonstances où il se trouva; les obstacles qui l'arrêtèrent; les hommes et les événemens par lesquels il fut secondé, et sur-tout la nature et la direction des efforts qui lui valurent tant de succès.

Ce n'était point, en effet, pour que son portrait fût flatté, qu'il a voulu être peint d'après lui-même; et il ne cherchait qu'à servir encore ses semblables, par cette dernière attention.

Un exemple pareil avait déja été donné par le grand Linnœus, qui envoya à Condorcet un détail exact de sa vie; et, nous oserons le dire, il serait à souhaiter qu'il fût suivi par les hommes qui ont fait faire aux sciences des progrès remarquables. L'histoire de leurs idées, de leurs écarts même, et de leurs vaines tentatives, fournirait de précieux documens pour l'étude de l'esprit humain, et nos biographies rempliraient plus sûrement leur but qui n'est pas, comme on l'a dit quelquefois, d'ériger des monumens à la vanité, mais de montrer à ceux qui cultivent les sciences, les véritables routes de leur avancement, et d'enseigner aux autres combien elles méritent de reconnaissance et de respect.

Jacques Tenon était né à Scepeaux, près de Joigny, le 21 février 1724. Ses deux grands pères et son père avaient exercé la chirurgie dans ce village, mais ils n'y avaient pas trouvé la fortune, et le dernier regarda comme un avantage considérable de pouvoir s'établir à quelques lieues de là dans la petite ville de Courtenay.

Son existence y demeura toutefois bien chétive, et, pour surcroît de malaise, il eut à la partager avec onze enfans. Aussi Jacques Tenon, qui était l'aîné, dit-il que son principal maître fut la détresse de la maison paternelle. A 17 ans, il se hasarda de venir à Paris faire quelque étude de la profession qui avait été celle de sa famille. Sa mère, faute d'autres ressources, lui avait donné une lettre pour un de ses parens; mais il était si timide

que, tant qu'il lu resta de quoi se procurer un peu de pain, il n'osa la présenter. Apparemment qu'il avait eu quelque occasion d'apprendre comment d'ordinaire les pauvres sont reçus; mais cette fois il fut agréablement trompé. Ce parent, Nicolas Prévost, avocat assez employé, se trouva un véritable homme de bien. Touché de la situation de cet enfant, il le recueillit chez lui, et se chargea de diriger sa conduite. M. Tenon en parle avec une tendre reconnaissance, et le nomme l'auteur de sa fortune.

Ni l'anatomie, ni la chirurgie, ne semblèrent d'abord guère convenir à un jeune homme si délicat et si craintif. La chirurgie, sur-tout, telle qu'il la vit pratiquer à l'Hôtel-Dieu, lui inspira une vraie terreur. On opérait les malades les uns devant les autres; l'appareil redoutable des instrumens s'étalait à leurs yeux sans précaution. Les cris du malheureux attaché sur la table de douleur, portaient d'avance l'effroi dans l'ame de ceux qui devaient lui succéder; des apprentis saignaient sans règle, sans mesure certaine. Le même vase recevait le sang de plusieurs malades, en sorte qu'on ne pouvait juger ni de sa qualité, ni de sa quantité.

Je revenais, dit-il, les premiers jours tout tremblant, et je crus long-temps que je ne pourrais jamais vaincre l'horreur de ce spectacle.

Mais cette horreur même devint le premier et l'un des principaux mobiles du reste de sa vie. L'impression profonde qu'il avait éprouvée ne s'effaça plus, et, dès-lors, ne perdant plus de vue l'idée de porter la réforme dans cet affreux séjour, il dirigea constamment ses études vers ce but, et il saisit avec avidité tou tes les occasions d'y parvenir.

Son dégoût pour l'anatomie ordinaire des écoles ne fut guère moindre que son effroi pour la chirurgie de l'Hôtel-Dieu. Vainement il fit des efforts pour supporter le séjour de ces antres

infects, où ses camarades étaient obligés d'étudier les ressorts de la vie, au milieu de tout ce que la mort a de plus repoussant. Il eut enfin recours aux animaux; et l'admirable spectacle de l'organisation, une fois débarrassé de ses alentours lugubres, excita tellement sa curiosité, que l'anatomie devint pour lui l'objet d'une passion violente, en même temps qu'elle prit dans ses mains un caractère tout différent de celui qu'elle aurait conservé peut-être, s'il l'eût apprise par les méthodes vulgaires.

Ainsi, et il est bon de le remarquer dès l'abord, l'adversité continua d'être son meilleur maître; les deux rapports sous lesquels il s'est si fort distingué ont tenu essentiellement à la position malheureuse où se trouva sa jeunesse, et peut-être que s'il avait eu un peu plus d'aisance et un peu plus de santé, il ne serait jamais devenu qu'un chirurgien ordinaire de petite ville.

Ses exercices particuliers d'anatomie lui procurèrent bientôt l'amitié d'un homme digne de le servir. Long-temps il s'était modestement glissé au cours que le célèbre Winslow faisait au jardin du roi, et qui attirait une affluence prodigieuse. Il prit un jour la hardiesse de présenter à ce professeur une préparation du cœur qu'il avait exécutée d'après une leçon de la veille. Winslow, frappé de l'adresse que ce travail supposait, distingua aussitôt le jeune élève; lui assigna près de lui, au cours, une place distinguée et l'admit bientôt à partager les travaux intérieurs de son laboratoire.

M. Tenon put donc satisfaire à son gré sa passion pour l'étude du mécanisme vital; le corps humain, celui de plusieurs animaux lui étaient familiers; déjà il aurait pu passer pour un anatomiste habile, mais il restait toujours sans lettres, ignorant le latin, hors d'état de lire la plupart des bons ouvrages sur son art. Peut-être cette ignorance aurait-elle irrévocablement arrêté ses progres, s'il n'eût été engagé à s'y soustraire, par une révolution qui commença vers cette époque pour la chirurgie, et dont l'histoire

est tellement liée avec celle de M. Tenon, que nous ne pouvons nous dispenser d'en dire quelques mots.

Les médecins de l'antiquité n'avaient pas imaginé de se partager entre eux les divers moyens de guérir, et, comme le même malade a presque toujours besoin des remèdes internes et du secours de la main, le même médecin lui administrait les uns et les autres. Galien préparait ses remèdes et opérait ses malades, et l'on ne voit pas qu'Hippocrate ait dédaigné de saigner les siens, quand il le croyait nécessaire.

Mais dans les siècles d'ignorance, la médecine, ainsi que les autres sciences, fut livrée à des clercs qui, regardant leur caractère comme incompatible avec des opérations sanglantes, furent obligés d'employer des subalternes qui travaillaient sous leurs yeux et par leurs ordres.

Des institutions mal entendues et une vanité puérile maintinrent cette distinction après que la cause en eut cessé. Les docteurs laïcs, enorgueillis de leurs robes d'écarlate, continuèrent de regarder, comme au-dessous de leur dignité, d'exercer la chirurgie, et prirent en même temps toutes les précautions pour empêcher ceux qui l'exerçaient de rivaliser avec eux, en sorte que, à peu d'exceptions près, un art si difficile et si utile resta dans les mains d'êtres ignares que l'on confondait, sans trop d'injustice, dans la classe des barbiers.

Un de ces hommes de caractère, sans lesquels il ne se fait rien de grand, Lapeyronie, chirurgien de Montpellier, résolut de tirer la chirurgie de cette abjection. Il avait été appelé à donner à Louis XV, vers la fin de son éducation, une idée de l'anatomie, et lui avait fait voir la dissection de quelques animaux de la ménagerie.

Comme il était aimable et d'un esprit piquant, il intéressa vivement le jeune roi à ces dispositions merveilleuses par lesquelles la nature entretient le mouvement si compliqué de la

vie, et il profita avec habileté de cet intérêt pour réaliser ses vues en faveur de son art.

Pour réhabiliter la chirurgie, il ne s'agissait de rien moins que de la faire pratiquer par des hommes éclairés, ou d'éclairer ceux qui la pratiquaient. Engager les médecins à faire la chirurgie eût été au-dessus du crédit de Lapeyronie; il était plus simple de faire apprendre la médecine aux chirurgiens : c'est à quoi il se décida. Mais ce moyen, le plus simple, n'était pas encore très-aisé à faire admettre; et, si l'on se fût aperçu de toute l'étendue de son plan, la Faculté de médecine n'aurait pas manqué de mettre tout en œuvre pour le faire échouer; car non-seulement il devait soustraire les chirurgiens à la suprématie des médecins, mais il était presque impossible que la destruction de la Faculté n'en fût la conséquence plus ou moins prochaine. Et, en effet, la Faculté actuelle n'est que l'ancien collége de chirugie, renforcé de quelques médecins.

Aussi Lapeyronie procéda-t-il par degrés et avec une rare prudence.

Son premier pas avait été de faire établir un enseignement méthodique de l'art, et des sciences sur lesquelles il repose. Dès 1724, il avait obtenu l'érection de cinq chaires au collége de chirurgie de Paris.

Il voulut engager ensuite les chirurgiens à des discussions savantes; l'académie de chirurgie fut érigée en 1731.

Devenu, en 1736, premier chirurgien du roi, il tenta un troisième pas, celui qui pouvait éprouver le plus de difficultés de détail. C'était d'obliger les élèves en chirurgie à se préparer par l'étude des lettres et de la philosophie. Des lettres-patentes de 1743 les astreignirent à se faire recevoir maîtres-ès-arts.

Ce fut alors que le jeune Tenon se vit obligé de recommencer en quelque sorte son éducation; car à peine pouvait-il écrire quelques lignes correctement, mais il savait prendre une résolution, et la suivre : il s'opiniâtra si bien à ce travail, qu'au bout

de quinze mois, il parlait couramment le latin, entendait passablement le grec, et fut en état de se distinguer dans la classe de philosophie. A la fin du cours, devenu à son tour professeur, il donna à son maître et à ses camarades quelques démonstrations d'anatomie qui venaient fort bien à la suite de la physique et qui furent tellement goûtées, qu'on l'engagea encore plusieurs années à venir les répéter, chaque hiver, dans le même collége.

Une campagne à l'armée de Flandres, en 1748, compléta son instruction chirurgicale, et n'affaiblit pas l'horreur que lui avait inspirée l'administration des hôpitaux; une contagion naquit du désordre, et lui-même en fut atteint, mais il reconnut son mal, et dicta, avant de perdre connaissance, le traitement qu'il voulait qu'on lui fit. On lui obéit, et il fut sauvé.

A peine guéri, il apprit que l'on venait de mettre au concours deux places de chirurgien principal dans les hôpitaux de Paris; il commençait enfin à se sentir, et accourut se présenter, mais ce concours ne devait être qu'une forme: La Martinière, devenu premier chirurgien, avait dicté d'avance l'un des choix en faveur d'un protégé de M. de Beaumont, l'archevêque de Paris. On interrogea donc légèrement les premiers concurrens, qui répondirent non moins légèrement. Quand le tour de M. Tenon fut venu, il demanda la permission de dire d'abord quelques mots sur les questions adressées à ceux qui avaient paru avant lui. Il traita à fonds ce que chacun d'eux n'avait fait qu'effleurer, et répondit ensuite, avec la même profondeur et la même étendue, à ce qui lui avait été demandé à lui-même.

Il n'y eut protection qui tînt contre une pareille épreuve. M. Tenon fut nommé tout d'une voix à la place de la salpétrière. L'archevêque et le premier chirurgien, en lui avouant qu'ils en avaient desiré un autre, se félicitèrent de n'avoir pas réussi; et il conserva depuis lors l'estime et la protection de tous les deux.

L'établissement où il venait d'entrer lui rendait cette protection bien nécessaire.

Il nous peint, dans ses Mémoires, cette maison qui n'aurait dû être que le refuge de la pauvreté modeste, comme une espèce de république de huit mille femmes, qui n'étaient pas toutes vieilles, gouvernées par des religieuses, des prêtres et des commis, se divisant en factions et en cabales; brouillant leurs supérieurs, venant quelquefois à bout d'en perdre. On aurait dit une petite ville d'Italie dans le moyen âge.

Mais, si ce n'était pas un lieu de repos, c'était une source d'instruction, d'expérience et de fortune. La nature des maladies qu'il était censé y apprendre à connaître lui procura une clientelle nombreuse, composée toute entière, comme il le dit lui-même, de mauvaise compagnie ou de très-bonne. Les élèves n'abondèrent pas moins que les malades, et, après six ans de ce service, il rentra à Paris l'un des chirurgiens les plus occupés et l'un des professeurs les plus renommés.

On lui donna, en 1757, au collége de chirurgie, la chaire qu'avait remplie Andouillé, et il l'a exercée 25 ans. La solidité caractérisait son enseignement plus que l'éloquence; mais, au degré où il la portait, elle lui valut presque autant d'affluence. Une attention en quelque sorte religieuse à ne rien dire de hasardé, et à ne rien omettre de certain; les faits nombreux observés par lui, dont il enrichissait ses leçons; les objets matériels, les représentations en relief, ou en peinture, dont il les accompagnait, les consultations gratuites dont il les faisait suivre, lui procurèrent chaque année plus de mille auditeurs. Ce fut comme le membre de l'école le plus considéré, qu'en 1775, on le chargea d'inaugurer ce bel amphithéâtre, chef-d'œuvre de Gondouin et l'un des superbes monumens de cette capitale. La chirurgie le devait à un legs de Lapeyronie, mais Lapeyronie avait dû à Louis XV sa fortune et les moyens de la consacrer au bien de son art. Louis XV venait de mourir; et ce fut à célébrer ses bienfaits que M. Tenon consacra son discours.

Sans doute c'est un devoir, c'est un service à rendre aux peuples que de louer les princes, même de leur vivant, sur ce qu'ils font de bien, puisque la louange est presque le seul moyen qu'aient les faibles d'agir sur les puissans; mais c'est aussi un devoir, et un devoir plus facile à remplir, que de rendre cet hommage à leur mémoire. M. Tenon s'en acquitta avec une chaleur qu'il n'aurait peut-être pas eue, s'il eût parlé d'un roi dont on aurait pu croire qu'il avait encore quelque chose à attendre.

Bientôt il fit mieux que de louer les bienfaiteurs de la chirurgie; lui-même eut occasion de se mettre de leur nombre. La Martinière se faisait gloire de marcher sur les traces de son prédécesseur Lapeyronie; M. Tenon lui suggéra de compléter la fondation du collége de chirurgie, en y attachant un hôpital pour les accidens rares, susceptibles d'être traités par des méthodes nouvelles. Il avait en cela une double vue : non-seulement il voulait étendre la science, mais il espérait donner aussi un modèle d'après lequel on pût améliorer tous les hôpitaux.

Son idée fut goûtée par le premier chirurgien et par le gouvernement; La Martinière acheta une maison de ses deniers et y fonda quelques lits. Le roi Louis XVI en ajouta d'autres et attacha à l'établissement les revenus d'un bénéfice ecclésiastique. M. Tenon se chargea d'indiquer à l'architecte ce que réclamait la salubrité et de diriger le service pendant quelque temps, et il mit à cet emploi le zèle ardent d'un homme qui se voyait enfin parvenu au moment de préparer l'accomplissement du vœu de sa jeunesse. Cet hôpital fut le premier à Paris dirigé selon les lumières de la science, et cet exemple produisit en effet l'émulation que les fondateurs avaient espérée. Quelques bons citoyens essayèrent de l'imiter dans des établissemens particuliers. Des écrits éloquens attirèrent sur ce genre de bienfaisance l'attention du public; un cri général s'éleva enfin contre l'Hôtel-Dieu, et détermina le gouvernement à y porter ses regards.

Les anciens ne paraissent pas avoir eu d'hôpitaux. Les deux tiers de la population se composaient d'esclaves que leurs maîtres nourrissaient dans la vieillesse et dans les maladies; et les pauvres libres avaient une subsistance assurée, par suite des mauvaises institutions politiques qui obligeaient les magistrats à capter la faveur de la populace. La religion chrétienne, en introduisant des doctrines plus favorables à l'égalité civile, anéantit promptement l'esclavage domestique, et prépara par degrés la suppression de l'esclavage de la glèbe. Les pauvres furent tous libres, mais ils n'eurent plus à compter que sur la ressource journalière de leur travail, et il fallut ménager des secours aux infirmes et aux vieillards. Aussi voyons-nous, dès les premiers temps du christianisme, les évêques chargés d'appliquer au soulagement des pauvres une partie des dons des fidèles, et presque par-tout des hôpitaux s'élever à côté des églises.

C'est ainsi que se forma, dès le septième siècle, le grand hospice de l'Hôtel-Dieu. Sa situation, excellente tant que Paris demeura renfermé dans l'enceinte de la cité ou ne s'étendit pas beaucoup au-delà, ne convenait plus depuis long-temps à une capitale immense, surchargée déja de sa propre misère, et où aboutit encore une si grande partie de celle des provinces. Ne pouvant l'étendre en superficie, on avait élevé étages sur étages; des salles basses étaient encombrées de lits; les lits de malades; quatre, six misérables étaient souvent entassés sur un grabat de quatre pieds, et quelquefois l'on en mettait autant sur le ciel du lit. Les souffrances de l'enfer doivent surpasser à peine celles de ces malheureux, serrés les uns contre les autres, étouffés, brûlans, ne pouvant ni remuer ni respirer, se sentant quelquefois un ou deux morts entre eux pendant des heures entières. On jetait pêle-mêle toutes les maladies, sans distinguer les contagieuses : celles de la peau régnaient par-tout avec fureur; les femmes en couche, les enfans nouveau-nés étaient à côté des hommes attaqués de la petite-vérole. Les fous furieux s'agitaient, hurlaient tout près des

blessés que l'on opérait. L'air était si corrompu qu'aucune opétion grave ne réussissait, et que la gangrène s'emparait aussitôt des plaies.

Tel était, de l'aveu unanime des contemporains, le gouffre épouvantable que la ville la plus aimable de l'univers offrait pour dernier asyle à cette foule d'ouvriers, attirés pour entretenir son luxe et ses plaisirs. Il périssait le quart de ce qui y entrait, et la moitié du reste n'en sortait qu'après avoir échangé une maladie, en elle-même de peu de durée, contre une langueur sans remède.

On avait songé, à diverses époques, à diviser ou à transférer cette maison, mais la froideur que l'on met à faire le bien, l'attachement à de vieilles habitudes, et quelques intérêts subalternes, avaient arrêté tous les projets.

Lors même que Louis XVI ordonna, en 1785, à l'académie des sciences de lui faire un rapport sur les hôpitaux, l'administration de l'Hôtel-Dieu n'eut pas honte de refuser aux commissaires l'entrée des salles et la communication des réglemens et des registres.

M. Tenon y suppléa. Depuis quarante ans il observait en silence, il recueillait ces affreux détails. Des médecins et chirurgiens de ses amis, employés dans la maison, lui avaient fait connaître ce qu'il n'avait pu voir par lui-même. Il exposa, dans plusieurs Mémoires, avec la dernière précision, l'état de l'Hôtel-Dieu et des autres hôpitaux, et démontra les vices exécrables du premier et l'insuffisance de tous.

Bailly, chargé d'écrire le rapport de l'académie, eut le bon esprit de sentir que tous les artifices de l'éloquence ne pourraient qu'affaiblir un pareil tableau. Il s'en tint à l'énoncé rigoureux des faits, à un simple extrait du travail de M. Tenon, et son ouvrage eut un effet prodigieux.

Le roi fut profondément ému; une sorte d'horreur s'empara

de ce public si léger, mais si sensible ; il maudit son indifférence En quelques jours, une souscription de trois millions fut remplie ; l'académie dressa le plan de quatre hôpitaux à ériger dans des quartiers convenables, et, pour ne rien omettre d'utile dans le détail de l'exécution, elle envoya MM. Tenon et Coulomb en Hollande et en Angleterre, les chargeant de visiter les hôpitaux les plus célèbres par leur bonne organisation, et d'y recueillir tout ce que l'expérience et la science avaient pu y découvrir d'avantageux.

M. Tenon touchait enfin au but qu'il n'avait cessé d'envisager dès l'enfance, lorsque, en 1788, un gouvernement, réduit aux derniers expédiens, porta la main sur ce dépôt sacré, et anéantit, en un instant, l'œuvre de la bienfaisance et l'espoir du malheur. Parmi les nombreuses fautes de ce ministère, dont l'ineptie accéléra si fort la catastrophe de la France, celle-là fut sans contredit l'une des plus honteuses, et qui contribua le plus à lui attirer ce mépris dont sitôt après le roi et la nation furent les victimes.

Il n'a fallu rien moins que les événemens terribles qui, en nivelant tout, ont permis de tout reconstruire à neuf, pour que l'on pût mettre en commun les ressources des hôpitaux de Paris, répartir les malades selon les espaces, et donner à tous des soins également bien entendus.

L'on ne reçoit plus aujourd'hui que mille individus environ dans cet édifice, où il s'en accumulait quelquefois trois à quatre mille ; on n'y voit plus ni femmes en couche, ni insensés ; les maladies y sont séparées comme elles doivent l'être, et l'ordre y est si admirable, que la fièvre d'hôpital ne s'y montre pas et que les plus affreuses contagions, apportées par des armées battues et manquant de tout, sont venues s'éteindre dans le même lieu qui en était autrefois le foyer le plus actif.

Il s'en faut toutefois de beaucoup que la mortalité y soit réduite au même point que dans les autres hôpitaux, tant sa position et sa construction sont insalubres. Aussi M. Tenon

disait-il que l'on avait tout fait pour améliorer l'Hôtel-Dieu, hors un seul point, mais essentiel, qui était de l'abattre.

Cependant c'est déja gagner que de mourir sans avoir passé auparavant par un supplice affreux et inutile, et les malheureux doivent de la reconnaissance aux administrateurs vertueux dont le zèle est déja parvenu à leur procurer cet avantage; mais il est juste qu'ils associent à cette reconnaissance l'homme courageux qui excita le premier, et qui ne cessa d'entretenir en leur faveur la sensibilité publique.

Peu s'en fallut que M. Tenon ne prît personnellement une part active à ces grandes améliorations. Député, en 1791, à l'assemblée législative, il fut nommé aussitôt président du comité des secours, et, comme tel, chargé de présenter un travail sur l'organisation des hôpitaux; son rapport était prêt, lorsque le 10 août vint encore frustrer ses espérances.

Il ne fut plus possible dès-lors de songer au bien. Empêcher par-ci par-là un peu de mal était déja un succès rare, et cependant il le tenta aussi long-temps qu'il lui resta le moindre espoir. Le fameux club des cordeliers voulant, en 1792, supprimer le collége de chirurgie où M. Tenon avait enseigné si long-temps, il eut, à la sollicitation de quelques professeurs, la bonhomie de faire, devant une députation de ces gens-là, un discours sur l'utilité de l'art pour les armées. Vain effort! La destruction ne s'opéra que plus promptement.

Quand il vit enfin traîner à l'échafaud les Malesherbes, les Sarron, ces hommes qui l'avaient associé à leurs projets de bienfaisance, il s'aperçut qu'il ne restait plus rien à faire pour l'homme de bien, et il s'ensevelit à la campagne, dans la plus profonde solitude.

La science l'y consola.

Nous l'avons vu, dans sa jeunesse, cultivant l'anatomie sous les yeux de Winslow, l'étudiant déja sous des points de vue nouveaux.

Dès ces premiers temps, le caractère particulier de son esprit sembla consister dans l'exactitude la plus minutieuse, et il le porta également dans ses études, dans sa pratique, et dans toute la conduite de sa vie.

Dans les hôpitaux, il avait établi, pour l'histoire des maladies, pour l'examen des corps, l'ordre le plus scrupuleux : tout était décrit, enregistré; on dessinait ce qui méritait de l'être; des tableaux en couleur présentaient le mal dans toutes ses phases, jusqu'à la cicatrice de l'opération.

Louis XV, qui continuait à s'intéresser à la chirurgie, le fit engager par La Martinière à s'occuper des maladies des yeux. Aussitôt chacune d'elles fut étudiée, imitée en émail; quand le sujet venait à mourir, on prenait note des changemens intérieurs correspondans aux symptômes apparens; des yeux, des crystallins isolés étaient plongés dans diverses liqueurs, pour juger des effets de chaque agent.

M. Tenon avait en général deux usages, peut-être trop peu communs en médecine : le premier de soumettre un organe mort à tous les agens chimiques, afin d'en conclure, avec les restrictions convenables, ce qu'il devait en éprouver dans l'état de vie; le deuxième de donner la plus grande attention aux rapports des organes, attention qui lui faisait apercevoir souvent une action mutuelle entre les plus éloignés.

Cette double méthode avait donné un tour fort particulier à sa pratique : il surprenait ses malades par des questions et des conseils les plus imprévus; regardant les gencives ou les ongles à tel qui le consultait pour sa poitrine, ordonnant un purgatif pour une douleur de genou, et produisant souvent ainsi des soulagemens presque miraculeux. Une dame lui demandait un jour un remède pour un mal de joue; il commença par s'informer si son mari n'avait pas la goutte, et il régla le traitement en conséquence.

Son hygiène semblait particulièrement minutieuse, toujours

par les mêmes raisons; comme il avait calculé l'action de tout, tout lui paraissait pouvoir devenir remède ou poison, selon les circonstances, et son propre régime l'emportait encore en rigueur et en singularité sur celui qu'il prescrivait à ses malades; il ne prenait, ni ne faisait rien sans un motif déterminé, et il voyait de l'inconvénient ou de l'avantage à une multitude de choses que le commun des hommes croit indifférentes.

Ses travaux sur les hôpitaux le confirmèrent dans cette habitude de tout mesurer, de tout peser, de tout apprécier avec rigueur. Il savait, par pouces et par lignes, ce qu'il faut d'air à un homme pour respirer; ce qu'il lui faut d'espace pour être couché, pour être enterré; il avait parcouru, la toise à la main, les hôpitaux d'Amsterdam, de Londres, de Plymouth, et nous ne l'avons jamais vu assister aux obsèques d'un de nos confrères, qu'il n'ait mesuré la fosse, pour juger si elle était conforme aux réglemens.

Un tel homme semblait né, comme on voit, pour l'académie des sciences, et si l'on avait pu lui reprocher quelque chose, c'aurait été tout au plus de porter le genre d'esprit qu'elle demande au-delà du nécessaire; néanmoins il fut presque obligé d'en forcer l'entrée.

Il s'agissait de la place du célèbre chirurgien Jean-Louis Petit, qui vaquait depuis plus de huit ans. Sauveur-François Morand, directeur de l'académie, la desirait pour son fils, et retarda, sous mille prétextes, le moment où un concurrent dangereux serait admis à présenter ses travaux. Un jour cependant, au mois de mai 1759, il fut pris de la goutte; M. Tenon, averti à la hâte par le secrétaire Fouchi, profita du moment, et lut un premier Mémoire. L'académie, une fois frappée de son nom et de l'esprit dont ce travail portait l'empreinte, il n'y eut plus moyen de l'écarter. Un second Mémoire lui valut tous les suffrages, et le crédit de Morand se réduisit à faire demander pour son fils, qui d'ailleurs n'était pas sans mérite, une place de surnuméraire.

Son goût pour l'anatomie se réveilla avec vivacité dans une occasion où il s'agissait de faire entrer à l'académie, dans la section consacrée à cette science, un homme qui s'était distingué davantage en chimie, le célèbre Fourcroy. Le duc de la Rochefoucault qui avait été son élève, Condorcet ami du duc, Vicq-d'Azyr protecteur particulier de Fourcroy, Daubenton protecteur de Vicq-d'Azyr, le portaient avec chaleur. La discussion s'anima au point que l'on en vint à soutenir que l'anatomie était une science faite où il n'y avait plus rien à découvrir, et dont il était à-peu-près inutile que l'on s'occupât à l'académie des sciences.

C'était sans doute quelqu'une de ces assertions sans conséquence que l'on se permet trop souvent dans la chaleur de la dispute, mais M. Tenon prenait tout au sérieux, et ne lâchait jamais prise. Il fit un Mémoire; on lui répondit; il répliqua; on échangea encore dix autres écrits. Voulant enfin prouver par le fait combien il restait encore à apprendre, il se mit à développer plusieurs de ses premiers aperçus. A chaque séance, il apportait des objets inconnus; il en indiquait d'autres à rechercher. Son intention était, si l'on eût empêché l'impression de ses Mémoires, de passer à Londres, d'y publier chaque trimestre quelque écrit nouveau, et de les terminer tous par ce refrain : *Voilà ce qui prouve que l'anatomie n'est pas aussi avancée qu'on le croit à l'académie des sciences.* Heureusement le baron de Breteuil arrêta ce scandale. Il fit imprimer, aux frais du gouvernement, le premier Mémoire de M. Tenon, et l'engagea à consentir à la suppression des autres.

S'il y eut quelque passion dans la manière dont notre académicien défendit une cause d'ailleurs si juste: l'anatomie, la physiologie et l'histoire naturelle doivent également s'en féliciter; car elles ont peu de travaux comparables à celui qu'il commença dès-lors et auquel il consacra le reste de sa vie.

L'idée principale qui le dirigea fut d'appliquer à l'histoire d'un organe sain, la même méthode d'observations successives et

par époques, qu'il avait précédemment appliquée aux maladies; d'en suivre les développemens et les dégradations, et de marquer avec soin toutes les phases de ses métamorphoses; point de vue alors presque entièrement nouveau, et fécond en merveilles, sur-tout dans le cercle où il se renferma, celui des dents.

La dent, bien que chimiquement de la même substance que les os, ne leur ressemble ni par son tissu, ni par sa croissance, ni par ses rapports avec les autres organes et avec l'extérieur. Destinée à diviser les alimens, elle ne pouvait, comme les os, être recouverte de parties molles; susceptible de s'user par la trituration, il fallait qu'elle regagnât d'un côté ce qu'elle perdait de l'autre, et qu'après que sa matière serait épuisée, elle pût être remplacée; enfin il était nécessaire que la forme, la grandeur, le nombre des dents fussent appropriés à chaque espèce et à chaque âge, et au genre de nourriture que ces âges et ces espèces exigent.

M. Tenon le premier nous a fait connaître comment la nature remplit toutes ces conditions dans l'homme et dans les animaux.

Le cheval, sur-tout, que l'on étudiait cependant depuis presque autant de temps et avec presque autant de soin que l'homme, lui présenta une série d'observations entièrement nouvelles, et toutes plus admirables les unes que les autres. Il l'avait choisi, pour type de ses recherches, comme offrant plus de développement dans un temps plus court, à cause de sa taille et de la brièveté de sa vie; et même, pour mettre plus d'exactitude dans ces époques, il élevait des poulains et des ânes, qu'il faisait abattre au moment convenable.

On avait tellement négligé cette partie de l'organisation, que la plupart des hippiatres ignoraient que le cheval change une partie de ses molaires.

M. Tenon semble n'avoir presque rien laissé à apprendre.

Il fait connaître la capsule creusée sous la gencive, et renfer-

mant un noyau pulpeux au sommet duquel les premiers rudimens de la dent se montrent d'abord comme de petites calottes; il les voit s'épaissir, se réunir; le fûst de la dent s'allonger; les parois de la capsule déposer à sa surface une couche d'émail, et ensuite une troisième substance qui revêt l'émail lui-même. La couronne de la dent se montre enfin hors de la gencive, et aussitôt elle commence à se détruire par l'usage; mais le fûst croît à mesure par sa base, de sorte que cette couronne reste toujours a la même hauteur; enfin, ce frûst se divise en racines; sa matière semble épuisée. La nature y a pourvu : une autre capsule, réceptacle des germes d'une nouvelle dent, s'était formée entre les racines de l'ancienne, et en expulse les derniers restes pour la remplacer. En même temps des dents, qui ne doivent pas changer, s'étaient développées successivement dans le fond de la bouche, et avaient complété l'instrument de mastication. Des artifices tout particuliers, s'il est permis de s'exprimer ainsi, sont employés par la nature, pour ne laisser paraître ces arrière-molaires qu'à l'époque et dans la direction convenables; et, pendant que les dents éprouvent tous ces changemens, il s'en produit de correspondans à l'intérieur des mâchoires. Les cavités de l'os changent d'étendue et de figure, selon que les dents en remplissent l'espace ou qu'elles se produisent au dehors; le nerf lui-même, et le canal osseux où il est contenu changent de place et de direction suivant que les dents les y obligent; et les maladies du poulain et du jeune cheval se montrent précisément aux époques de ce combat, de cette compression que le nerf éprouve de la part de la dent. Mais toutes ces lois, toutes ces actions si compliquées ne sont point particulières à la dentition du cheval. M. Tenon en fait voir d'analogues dans les autres animaux; il les montre dans l'homme; et en tire les applications les plus utiles pour l'histoire et le traitement des maladies de l'enfance.

Si l'on ajoute à tous ces curieux phénomènes un mot que M. Tenon n'a pas prononcé, c'est que la dent se forme par sécré-

tion et par couches, tandis que l'os se développe par intussusception, et que ces deux modes opposés de croissance sont cependant combinés, agissent et réagissent, chacun à son tour, dans ces révolutions successives de l'organe manducatoire, on conviendra que cette partie, en apparence si petite, et longtemps si négligée de l'organisation, est peut-être celle où la prévoyance et les ressources de la nature se montrent à nous avec le plus d'évidence et de manière à contraindre plus impérieusement notre admiration et notre respect.

C'est par ces belles découvertes que M. Tenon charma sa retraite. Il y était si profondément absorbé, qu'il ne lisait pas même de journaux, et ne s'informait en aucune façon de ce qui se passait sur le théâtre des révolutions. Il l'ignorait si bien que, lorsqu'il reçut du ministre Benezech l'avis de sa nomination à l'Institut national, il se figura que c'était encore là quelqu'une de ces assemblées politiques, auxquelles il se trouvait si heureux d'être devenu étranger; et qu'il hésita long-temps pour se décider à venir prendre une information plus exacte. Enfin, se retrouvant au Louvre avec ses vieux collègues de l'académie, et dans son ancienne salle, il vit bien qu'il était arrivé quelque changement dans les affaires, et il se décida à rester.

Il s'aperçut promptement aussi qu'il était arrivé quelque changement dans les idées, et que l'on ne regardait plus l'anatomie comme une science faite, car chacun s'empressa de lui demander la publication de son travail; et, sur un échantillon qu'il en donna dans le premier volume de nos Mémoires, la classe des sciences arrêta même que toutes les planches seraient dessinées et gravées aux frais de l'Institut.

Mais ces prévenances ne purent le déterminer à paraître avant le moment qu'il s'était fixé: il lui manquait deux ou trois observations pour remplir rigoureusement son plan; il aurait été pour la première fois infidèle à cette minutieuse exactitude qui faisait sa seconde nature; et, comme depuis quatre-vingts ans il réus-

sissait à tout par la persévérance, il oublia que l'homme peut tout, excepté d'épuiser la connaissance de la nature, même sur la plus limitée de ses productions. Son ouvrage est donc resté manuscrit, au grand regret de ses confrères; mais ils n'osèrent insister. M. Tenon leur imposait; son visage austère, sa haute stature, que l'âge n'avait point courbée, son costume antique, sa démarche grave, en faisaient en quelque sorte, vis-à-vis de nous, le représentant de la génération précédente. Il nous disait quelquefois, comme Nestor : *Écoutez-moi, car j'ai vécu avec des hommes qui valaient mieux que vous.* Mais nous étions si disposés à l'entendre que cet exorde habituel ne nous refroidissait pas.

Peut-être aurions-nous joui quelques années encore de ses paternels avis; peut-être serait-il parvenu enfin à se contenter lui-même d'un travail où personne que lui ne trouvait plus rien à desirer, s'il n'eût été vivement atteint dans ses seules jouissances. Au mois de juillet 1815, une troupe étrangère s'empara de sa maison de campagne; cette pétulance naturelle au soldat oisif s'exerça sur la partie de ses collections qu'il y avait laissée. Des objets rassemblés par cinquante ans d'assiduités furent brisés; ses plus beaux livres souillés ou déchirés; lui-même obligé de fuir. Depuis lors, le courage lui manqua, et avec le courage la force disparut. Il ne fit plus que décliner, et un léger catharre l'enleva le 16 janvier 1816.

Du moins le manuscrit et les planches de son ouvrage sur les dents ont été sauvés, et nous devons espérer que le public en jouira bientôt; ce sera le monument le plus durable des efforts d'une longue vie. Le bien que l'on fait aux hommes, quelque grand qu'il soit, est toujours passager; les vérités qu'on leur laisse sont éternelles.

MÉMOIRE

Sur la variation des constantes arbitraires, dans les questions de mécanique.

PAR M. POISSON.

Lu à l'Académie, le 2 septembre 1816.

CE Mémoire est le complément de celui que j'ai lu à l'Institut en 1809, sur le même sujet, et qui a été imprimé dans le quinzième cahier du journal de l'École polytechnique. J'ai donné alors un système de formules qui expriment directement les différentielles des constantes arbitraires, devenues variables, au moyen des différences partielles d'une certaine fonction dépendante des forces qui les font varier, prises par rapport à ces mêmes constantes; et j'ai démontré d'une maniere directe que les coëfficients de ces différences partielles sont des fonctions des constantes, qui ne renferment pas le temps explicitement. On trouve ensuite, dans ce Mémoire, l'application de ces formules générales à deux questions différentes : au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, suivant une fonction indéterminée de la distance, et au mouvement de rotation d'un corps solide de figure quelconque. Un calcul très-long, dont

j'ai rapporté tous les détails, m'a conduit aux expressions différentielles des six constantes arbitraires, relatives à chacun de ces deux problèmes. En les comparant, on reconnaît que les différentielles des constantes analogues ont identiquement la même forme pour l'une et l'autre question; résultat singulier qui m'a fait présumer qu'on pourrait obtenir ces différentielles, ou du moins une partie d'entre elles, par une méthode indépendante de la nature du problème, et beaucoup plus courte que l'application des formules générales. C'est, en effet, ce que j'ai vérifié depuis, à l'égard des constantes qui complètent les intégrales fournies par les principes généraux de la mécanique. L'exposition de cette nouvelle méthode est un des objets principaux du Mémoire suivant. Elle est précédée d'un paragraphe où l'on trouvera les différents systèmes de formules générales, propres à déterminer les différentielles de toutes les constantes arbitraires, et d'un autre article où j'ai réuni, sous le titre de propriétés des équations générales du mouvement, diverses formules, déja en partie connues, qui sont indépendantes des forces appliquées aux mobiles, et quelquefois même de la nature du système que l'on considère.

Les expressions différentielles des constantes arbitraires doivent être regardées comme une transformation des équations générales du mouvement, par laquelle on remplace un nombre d'équations différentielles secondes, égal à celui des variables indépendantes, par un nombre double d'équations du premier ordre. Cette transformation n'est d'aucune utilité pour la résolution rigoureuse des problèmes; mais quand les forces qui font varier les constantes arbitraires,

sont très-petites par rapport à celles qui agissaient primitivement sur les mobiles, elle est très-utile pour résoudre les questions de mécanique par une suite d'approximations ordonnées suivant les puissances des forces perturbatrices, et elle a l'avantage qui lui est particulier, de ramener immédiatement aux quadratures, les valeurs déterminées par la première approximation, où l'on néglige le quarré de ces forces. Les termes qui entrent dans les différentielles des constantes, sont très-petits du même ordre que ces forces; néanmoins il en est parmi eux qui augmentent beaucoup et deviennent très-sensibles par l'intégration : dans la théorie des planètes, ces termes sont principalement ceux qui se trouvent indépendans des moyens mouvemens de la planète troublée et des planètes perturbatrices; et leur détermination est, comme on sait, la question la plus importante de l'astronomie physique. Les formules de la variation des constantes arbitraires, en donnent la solution la plus simple et la plus directe, ainsi qu'on peut le voir dans le supplément au troisième volume de la mécanique céleste, et dans le tome second de la mécanique analytique. Je me borne à considérer, dans le quatrième et dernier paragraphe de ce Mémoire, les différentielles du grand axe et du moyen mouvement; je rappelle d'abord la démonstration connue de l'invariabilité de ces deux élémens, quand on néglige les quantités du troisième ordre par rapport aux forces perturbatrices, et qu'on fait abstraction des inégalités périodiques; ensuite je démontre que les variations des élémens elliptiques de la planète troublée n'introduiraient aucun terme non périodique dans la différentielle seconde de son moyen mouvement,

quand bien même on pousserait l'approximation jusqu'aux quantités du troisième ordre inclusivement ; d'où l'on pourra conclure, par induction, qu'il en serait de même dans toutes les approximations suivantes, du moins pour les termes résultans de la variation de ces élémens, car l'analyse que j'expose n'est point applicable aux termes dus à la variation des élémens des planètes perturbatrices. Passé le second ordre, les inégalités séculaires des moyens mouvemens des planètes seraient comparables, dans leurs *maxima*, aux inégalités périodiques ordinaires, et parconséquent on pourrait n'en tenir aucun compte. Mais dans la théorie des satellites, et particulièrement dans celle de la lune, ces inégalités, s'il en existait, ne devraient pas être entièrement négligées, en égard à la grandeur de la force perturbatrice du soleil; d'ailleurs, sous le rapport de l'analyse, la disparition des termes non périodiques dans l'expression du moyen mouvement, est un théorême très-remarquable; j'ai donc espéré que les géomètres ne trouveraient pas déplacée la démonstration relative au troisième ordre, qui termine ce Mémoire.

Une observation qu'on ne doit pas perdre de vue dans toute cette théorie, c'est que les moyens mouvemens y sont considérés d'une manière abstraite et indépendamment des rapports numériques qui existent entre eux. Quelquefois ces rapports peuvent produire des inégalités dont la période embrasse plusieurs siècles, ainsi que M. Laplace l'a fait voir relativement à Saturne et Jupiter; d'autres fois même, il en peut résulter de véritables équations séculaires, en entendant par cette dénomination, des inégalités qui ont une période

indépendante de la configuration des planètes; et la libration des trois premiers satellites de Jupiter, dont la théorie est également due à l'auteur de la mécanique céleste, offre un exemple de ce second cas. A la vérité, le coëfficient de la libration est arbitraire, et les recherches de M. Delambre sur ce sujet, ont prouvé qu'il doit être insensible; mais cela n'empêche pas que la libration n'existe réellement pour la théorie, et qu'on ne doive la considérer comme une inégalité de l'espèce dont nous parlons, qui affecte les moyens mouvemens des trois satellites.

§. Ier.

Propriétés des équations générales du mouvement.

(1) Je considère un système de points matériels, liés entre eux d'une manière quelconque, et sollicités par des forces qui proviennent, soit de leur action mutuelle, soit de causes étrangères au système; je suppose seulement que la somme des forces motrices de tous ces points, multipliées chacune par l'élément de sa direction, forme une différentielle exacte par rapport aux coordonnées des mobiles, et je désigne par V l'intégrale de cette différentielle, laquelle intégrale sera une fonction donnée de ces coordonnées, qui pourra, en outre, contenir le temps explicitement. Soit m, la masse d'un des mobiles; x, y, z, ses trois coordonnées orthogonales; $L=o$, $M=o$, etc., les équations de condition qui expriment la liaison des points du système que l'on considère; t le temps dont la différentielle première sera sup-

posée constante : les trois équations du mouvement du point m seront

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dV}{dx}&=\lambda\frac{dL}{dx}+\mu\frac{dM}{dx}+\text{etc.},\\ m\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dV}{dy}&=\lambda\frac{dL}{dy}+\mu\frac{dM}{dy}+\text{etc.},\\ m\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dV}{dz}&=\lambda\frac{dL}{dz}+\mu\frac{dM}{dz}+\text{etc.};\end{aligned}\right\}(m)$$

et il y en aura trois semblables pour chacun des trois mobiles. Les facteurs λ, μ, etc., sont des inconnues qui resteront les mêmes dans les équations des autres points, c'est-à-dire que les différences partielles de L seront par-tout multipliées par le même facteur λ, celles de M par μ, etc.

Au moyen des intégrales de toutes ces équations, on peut concevoir les coordonnées des mobiles exprimées en fonctions de t et d'un certain nombre de constantes arbitraires; leurs valeurs, substituées dans ces mêmes équations et dans $L=0$, $M=0$, etc., auront la propriété de les rendre identiques; de sorte que l'on peut différentier chaque équation, en y considérant les variables comme des fonctions implicites des constantes arbitraires de l'intégration. Ainsi, en désignant par δ, une différentielle relative à une portion quelconque de ces constantes, et par Δ, une autre différentielle de la même nature, on aura

$$\delta L=0,\quad \Delta L=0,\quad \delta M=0,\quad \Delta M=0,\quad \text{etc.};$$

$$m\delta\frac{d^2x}{dt^2}+\delta\frac{dV}{dx}=\frac{dL}{dx}\delta\lambda+\lambda\delta\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dx}\delta\mu+\mu\delta\frac{dM}{dx}+\text{etc.},$$

$$m\Delta\frac{d^2x}{dt^2}+\Delta\frac{dV}{dx}=\frac{dL}{dx}\Delta\lambda+\lambda\Delta\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dx}\Delta\mu+\mu\Delta\frac{dM}{dx}+\text{etc.}$$

Des deux dernières équations on déduit celle-ci :

$$m\left(\Delta x\,\delta\frac{d^2x}{dt^2}-\delta x\,\Delta\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\Delta x\,\delta\frac{dV}{dx}-\delta x\,\Delta\frac{dV}{dx}=$$
$$\frac{dL}{dx}(\Delta x\,\delta\lambda-\delta x\,\Delta\lambda)+\lambda\left(\Delta x\,\delta\frac{dL}{dx}-\delta x\,\Delta\frac{dL}{dx}\right)+\text{etc.}\,;$$

on aura deux autres équations de même forme, l'une relative à y, et l'autre relative à z; en les réunissant toutes trois et étendant ensuite la somme à tous les points du système, somme que j'indiquerai par la caractéristique Σ, on a

$$\Sigma m\left[\Delta x\,d\frac{d^2x}{dt^2}-\delta x\Delta\frac{d^2x}{dt^2}+\Delta y\,\delta\frac{d^2y}{dt^2}-\delta y\Delta\frac{d^2y}{dt^2}+\Delta z\,\delta\frac{d^2z}{dt^2}-\delta z\Delta\frac{d^2z}{dt^2}\right]$$
$$=\Sigma\left[\delta x\Delta\frac{dV}{dx}-\Delta x\delta\frac{dV}{dx}+\delta y\Delta\frac{dV}{dy}-\Delta y\delta\frac{dV}{dy}+\delta z\Delta\frac{dV}{dz}-\Delta z\delta\frac{dV}{dz}\right]$$
$$+\Sigma\lambda\left[\Delta x\delta\frac{dL}{dx}-\delta x\Delta\frac{dL}{dx}+\Delta y\delta\frac{dL}{dy}-\delta y\Delta\frac{dL}{dy}+\Delta z\delta\frac{dL}{dz}-\delta z\Delta\frac{dL}{dz}\right]$$
$$+\Sigma\left[\delta\lambda\left(\frac{dL}{dx}\Delta x+\frac{dL}{dy}\Delta y+\frac{dL}{dz}\Delta z\right)-\Delta\lambda\left(\frac{dL}{dx}\delta x+\frac{dL}{dy}\delta y+\frac{dL}{dz}\delta z\right)\right]$$
$$+\text{etc.}$$

Or il est facile de prouver que tous les termes se détruisent dans le second membre de cette équation.

En effet la quantité λ et ses différentielles peuvent être mises en-dehors du signe Σ, puisque ce sont des quantités communes à tous les points du système; les termes multipliés par $\delta\lambda$ deviennent donc

$$\delta\lambda\,\Sigma\left(\frac{dL}{dx}\Delta x+\frac{dL}{dy}\Delta y+\frac{dL}{dz}\Delta z\right)=\delta\lambda\,\Delta L=0\,;$$

et il en est de même de la partie multipliée par $\Delta\lambda$. Quant à celle qui renferme λ, elle devient

$$\lambda\Sigma\left[\Delta x\,\delta\frac{dL}{dx}-\delta x\,\Delta\frac{dL}{dx}+\Delta y\,\delta\frac{dL}{dy}-\delta y\,\Delta\frac{dL}{dy}+\Delta z\,\delta\frac{dL}{dz}-\delta z\,\Delta\frac{dL}{dz}\right].$$

Pour prouver que cette somme est nulle, soit u une coordonnée quelconque de l'un des mobiles; $\delta\frac{dL}{dx}$ renfermera le terme $\frac{d^2L}{du\,dx}\delta u$, et $\Delta\frac{dL}{dx}$, le terme $\frac{d^2L}{du\,dx}\Delta x$; donc cette somme contiendra le terme $\frac{d^2L}{du\,dx}(\Delta x\,\delta u-\Delta u\,\delta x)$; et comme elle est symétrique par rapport à toutes les coordonnées, elle contiendra aussi le terme $\frac{d^2L}{du\,dx}(\Delta u\,\delta x-\Delta x\,\delta u)$, égal et de signe contraire au précédent : elle se décomposera donc en couples de termes égaux et de signes contraires, et par conséquent elle se réduira à zéro.

Le même raisonnement s'applique à la partie du second membre de notre équation, qui renferme la fonction V; si donc on fait

$$\frac{dx}{dt}=x',\quad \frac{dy}{dt}=y',\quad \frac{dz}{dt}=z';$$

cette équation se réduira à

$$\Sigma m\left[\Delta x\,\delta\frac{dx'}{dt}-\delta x\,\Delta\frac{dx'}{dt}+\Delta y\,\delta\frac{dy'}{dt}-\delta y\,\Delta\frac{dy'}{dt}\right.$$
$$\left.+\Delta z\,\delta\frac{dz'}{dt}-\delta z\,\Delta\frac{dz'}{dt}\right]=0.$$

Son premier membre est une différentielle immédiate par

rapport à t; car on a identiquement

$$\Delta x\,\delta\frac{dx'}{dt}=d\frac{(\Delta x\,\delta x')}{dt}-\Delta x'\,\delta x',$$

$$\delta x\,\Delta\frac{dx'}{dt}=d\frac{(\delta x\,\Delta x')}{dt}-\delta x'\,\Delta x';$$

d'où il résulte

$$\Delta x\,\delta\frac{dx'}{dt}-\delta x\,\Delta\frac{dx'}{dt}=d\frac{(\Delta x\,\delta x'-\delta x\,\Delta x')}{dt};$$

et de même pour les termes en y ou en z. Multipliant donc par dt, et intégrant, on aura

$$\Sigma m[\Delta x\,\delta x'-\delta x\,\Delta x'+\Delta y\,\delta y'-\delta y\,\Delta y'+\Delta z\,\delta z'-\delta z\,\Delta z']=\text{const.}(1)$$

(2) Cette équation remarquable se décompose en autant d'autres équations que l'on peut former de combinaisons deux à deux, entre les constantes arbitraires contenues dans les intégrales complètes des équations du mouvement. En effet, en désignant ces constantes par a, b, c, etc., on aura, de la manière la plus générale,

$$\delta x=\frac{dx}{da}\delta a+\frac{dx}{db}\delta b+\frac{dx}{dc}\delta c+\text{etc.}$$

$$\delta x'=\frac{dx'}{da}\delta a+\frac{dx'}{db}\delta b+\frac{dx'}{dc}\delta c+\text{etc.},$$

$$\Delta x=\frac{dx}{da}\Delta a+\frac{dx}{db}\Delta b+\frac{dx}{dc}\Delta c+\text{etc.},$$

$$\Delta x'=\frac{dx'}{da}\Delta a+\frac{dx'}{db}\Delta b+\frac{dx'}{dc}\Delta c+\text{etc.};$$

et de même pour les différentielles de y, y', z, z'. Je sub-

stitue ces valeurs dans le premier membre de l'équation (1); je fais passer hors du signe Σ, les produits des variations de a, b, c, etc.; enfin j'observe que ces quantités étant indépendantes entre elles, il s'ensuit que le coëfficient de chaque produit de deux variations différentes, doit être séparément une quantité constante: ainsi, en considérant, par exemple, le coëfficient du produit $\Delta a\ \delta b$, et désignant par (a, b), une quantité indépendante de t, on aura

$$\Sigma m\left(\frac{dx}{da}\frac{dx'}{db}-\frac{dx}{db}\frac{dx'}{da}+\frac{dy}{da}\frac{dy'}{db}-\frac{dy}{db}\frac{dy'}{da}\right.$$
$$\left.+\frac{dz}{da}\frac{dz'}{db}-\frac{dz}{db}\frac{dz'}{da}\right)=(a, b). \qquad (2)$$

On formera une équation semblable pour chaque couple de constantes arbitraires; et réciproquement l'équation (1), dans toute sa généralité, se déduira facilement de l'ensemble de toutes ces équations.

La constante (a, b) sera quelquefois une quantité déterminée, et d'autres fois, une fonction d'une ou de plusieurs des constantes a, b, c, etc. On emploie ici la notation (a, b), pour rappeler l'origine de cette quantité, et non pour désigner une fonction de a et b seules. On peut observer que l'on a, d'après cette notation,

$$(a, a)=0, \quad (a, b)=-(b, a).$$

(3) M. Lagrange donne, dans la seconde édition de la mécanique analytique (*), une formule analogue à notre

(*) Tome Ier, pag. 329.

équation (1), qui se confond avec elle, quand les mobiles sont libres, mais qui en diffère essentiellement, lorsqu'il s'agit d'un système de points liés entre eux d'une manière quelconque. Pour former cette autre équation, représentons par φ, ψ, θ, etc., les variables indépendantes entre elles et réduites au plus petit nombre possible, qui déterminent la position des mobiles dans l'espace; conservons à la quantité V, sa signification précédente; soit T, la demi-somme des forces vives de tous les points du système; et faisons enfin

$$\frac{d\varphi}{dt}=\varphi', \quad \frac{d\psi}{dt}=\psi', \quad \frac{d\theta}{dt}=\theta', \text{ etc.},$$

$$\frac{dT}{d\varphi'}=u, \quad \frac{dT}{d\psi'}=v, \quad \frac{dT}{d\theta'}=s, \text{ etc. :}$$

les équations du mouvement seront en même nombre que les variables φ, ψ, θ, etc., et de la forme :

$$\frac{du}{dt}-\frac{dT}{d\varphi}+\frac{dV}{d\varphi}=0,$$

$$\frac{dv}{dt}-\frac{dT}{d\psi}+\frac{dV}{d\psi}=0,$$

$$\frac{ds}{dt}-\frac{dT}{d\theta}+\frac{dV}{d\theta}=0,$$

etc.

Or on en déduit, par une analyse semblable à celle du n° 1, la formule de la mécanique analytique, savoir:

$$\Delta\varphi\,\delta u-\delta\varphi\,\Delta u+\Delta\psi\,\delta v-\delta\psi\,\Delta v+\Delta\theta\,\delta s-\delta\theta\,\Delta s+\text{etc.} = \text{const.} \qquad (3)$$

Elle se décomposera comme la formule (1), en équations

relatives à chaque couple de constantes arbitraires; de sorte que a et b étant deux de ces constantes, et $(\overline{a, b})$ désignant une quantité indépendante de t, on aura

$$\frac{d\varphi}{da}\frac{du}{db}-\frac{d\varphi}{db}\frac{du}{da}+\frac{d\psi}{da}\frac{dv}{db}-\frac{d\psi}{db}\frac{dv}{da}+\frac{d\theta}{da}\frac{ds}{db}-\frac{d\theta}{db}\frac{ds}{da}+\text{etc.}$$
$$=(\overline{a, b}). \qquad (4)$$

Lorsque les points du système ne sont liés par aucune équation de condition, on peut prendre leurs coordonnées même, pour les variables indépendantes; alors on a

$$T=\frac{1}{2}\Sigma m\,(x'^2+y'^2+z'^2);$$

et si l'on suppose que les trois variables φ, ψ, θ, sont les coordonnées x, y, z, on aura

$$\varphi'=x', \quad \psi'=y', \quad \theta'=z',$$

et par suite,

$$u=mx', \quad v=my', \quad s=mz';$$

d'où il est facile de conclure que, dans ce cas particulier, les formules (3) et (4), coïncident avec les équations (1) et (2). En général, ces différentes formules expriment des propriétés des équations du mouvement, qui sont indépendantes des forces qui agissent sur les mobiles; mais les formules (1) et (2) ont cela de particulier, qu'elles sont même indépendantes de la nature du système, ou des équations de condition auxquelles les mobiles sont assujéties.

Il existe encore une formule de la même espèce, qui est,

pour ainsi dire, inverse de l'équation (4), et que j'ai démontrée dans un autre Mémoire sur le même sujet que celui-ci (*). En conservant les notations précédentes, j'ai fait voir, en effet, que l'on a toujours

$$\frac{da}{du}\frac{db}{d\varphi}-\frac{da}{d\varphi}\frac{db}{du}+\frac{da}{dv}\frac{db}{d\psi}-\frac{da}{d\psi}\frac{db}{dv}+\frac{da}{ds}\frac{db}{d\theta}-\frac{da}{d\theta}\frac{db}{ds}+\text{etc.}$$
$$=[a, b]; \qquad (5)$$

$[a, b]$ désignant une quantité indépendante du temps, qui peut être une constante déterminée, ou une fonction des constantes arbitraires. La démonstration que j'ai donnée de ce théorème est très-compliquée; elle se simplifie beaucoup lorsque les points du système sont libres, et qu'on prend leurs coordonnées orthogonales pour les variables indépendantes; mais sa longueur paraît inévitable, dans le cas général où ces points sont liés entre eux d'une manière quelconque. Par rapport à cette notation $[a, b]$, on a aussi

$$[a, b]=-[b, a], \quad [a, a]=0.$$

Quoique la fonction V, qui dépend des forces motrices du système, n'entre pas dans les équations (1), (2), (3), (4), (5), il ne faut pas oublier cependant, qu'elles sont subordonnées à certaines restrictions, savoir : que les forces appliquées aux mobiles ne sont fonctions que du temps et de leurs coordonnées, et que la somme de ces forces, multipliées chacune par l'élément de sa direction, forme une différentielle exacte par rapport à ces coordonnées. C'est ce qui,

(*) Journal de l'École Polytechnique, 15e cahier.

effectivement, a lieu pour toutes les forces de la nature, excepté pour celles qui proviennent du frottement ou de la résistance des milieux, et qui sont fonctions des vîtesses des mobiles; en sorte que nos formules ne seront en défaut que dans les cas où l'on aura égard à de semblables résistances.

(4) On trouve dans le Mémoire de M. Cauchy, sur la *Théorie des ondes*, des intégrales relatives au mouvement des fluides, qui ne sont qu'une application particulière de notre équation (2). En effet les équations du mouvement de chaque molécule fluide, sont

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dU}{dx} = \frac{dp}{dx},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dU}{dy} = \frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dU}{dz} = \frac{dp}{dz};$$

p étant une fonction inconnue de x, y, z et t, qui représente la pression que la molécule éprouve à un instant quelconque, et U, l'intégrale de la somme des forces accélératrices qui la sollicitent, multipliées chacune par l'élément de sa direction. Or, en faisant $U - p = V$, on voit que ces équations ont la même forme que celles du n°. 1; nous pouvons donc considérer isolément le mouvement de la molécule qui répond aux coordonnées x, y, z; et si nous prenons pour les constantes arbitraires a, b, c, les valeurs initiales de ces trois coordonnées, nous aurons, d'après l'equation (2),

$$\frac{dx}{da}\frac{dx'}{db}-\frac{dx}{db}\frac{dx'}{da}+\frac{dy}{da}\frac{dy'}{db}-\frac{dy}{db}\frac{dy'}{da}+\frac{dz}{da}\frac{dz'}{db}-\frac{dz}{db}\frac{dz'}{da}=(a,b),$$

et des expressions semblables pour les quantités (a, c) et (b, c). Soient de plus a', b', c', les valeurs initiales des vîtesses x', y', z', lesquelles sont des fonctions arbitraires de a, b, c; on aura, à l'origine du mouvement

$$x=a,\quad y=b,\quad z=c;\qquad x'=a',\quad y'=b',\quad z'=c';$$

substituant ces valeurs dans l'équation précédente, elle se réduit à

$$\frac{da'}{db}-\frac{db'}{da}=(a,b);$$

donc, à cause que (a, b) est une constante, on aura aussi, à un instant quelconque,

$$\frac{dx}{da}\frac{dx'}{db}-\frac{dx}{db}\frac{dx'}{da}+\frac{dy}{da}\frac{dy'}{db}-\frac{dy}{db}\frac{dy'}{da}+\frac{dz}{da}\frac{dz'}{db}-\frac{dz}{db}\frac{dz'}{da}=\frac{da'}{db}-\frac{db'}{da};$$

et l'on en déduira, par la permutation des lettres,

$$\frac{dz}{dc}\frac{dz'}{da}-\frac{dz}{da}\frac{dz'}{dc}+\frac{dx}{dc}\frac{dx'}{da}-\frac{dx}{da}\frac{dx'}{dc}+\frac{dy}{dc}\frac{dy'}{da}-\frac{dy}{da}\frac{dy'}{dc}=\frac{dc'}{da}-\frac{da'}{dc},$$

$$\frac{dy}{db}\frac{dy'}{dc}-\frac{dy}{dc}\frac{dy'}{db}+\frac{dz}{db}\frac{dz'}{dc}-\frac{dz}{dc}\frac{dz'}{db}+\frac{dx}{db}\frac{dx'}{dz}-\frac{dx}{dc}\frac{dx'}{db}=\frac{db'}{dc}-\frac{dc'}{db}.$$

Ces trois équations sont celles que M. Cauchy a formées d'une manière différente, dans le Mémoire cité. Il est facile de vérifier qu'elles sont identiques, lorsque la formule

$$x'dx+y'dy+z'dz$$

est une différentielle exacte, ce qui a lieu, comme on sait, dans la plupart des problêmes relatifs au mouvement des fluides, soit incompressibles, soit élastiques.

On pourrait aussi prendre a', b', c', pour les constantes arbitraires, et regarder a, b, c comme des fonctions de ces quantités. On aurait alors, en vertu de la formule (2), trois équations qui se déduiront des précédentes par l'échange réciproque des lettres a, b, c, et a', b', c'; mais il ne paraît pas que ces diverses équations puissent être d'aucune utilité dans la théorie des fluides.

§. II.

Expressions différentielles des constantes arbitraires, devenues variables.

(5) Supposons maintenant que, sans changer la nature du systême que nous considérons, on ajoute de nouvelles forces à celles qui agissaient précédemment sur les mobiles. Les équations de condition du systême seront toujours $L=0$, $M=0$, etc.; mais les facteurs indéterminés qui multiplient les différences partielles de L, M, etc., dans les équations du mouvement, pourront avoir changé; c'est pourquoi nous les désignerons par λ', μ', etc., au lieu de λ, μ, etc. qui désignaient ces mêmes facteurs avant l'introduction des nouvelles forces. Les trois équations du mouvement du point m seront présentement

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dV}{dx}&=(x)+\lambda'\frac{dL}{dx}+\mu'\frac{dM}{dx}+\text{etc.},\\ m\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dV}{dy}&=(y)+\lambda'\frac{dL}{dy}+\mu'\frac{dM}{dy}+\text{etc.},\\ m\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dV}{dz}&=(z)+\lambda'\frac{dL}{dz}+\mu'\frac{dM}{dz}+\text{etc.};\end{aligned}\right\}(m')$$

où l'on a représenté par (x), (y), (z), les composantes des nouvelles forces, dirigées respectivement suivant les coordonnées x, y, z, et tendantes à les augmenter. On aura trois équations semblables pour chacun des autres points du système.

Représentons comme précédemment (nº 3), par φ, ψ, θ, etc., les variables indépendantes qui suffisent pour fixer la position de tous les mobiles dans l'espace, et dont, parconséquent, leurs coordonnées sont des fonctions déterminées. Ces quantités sont les véritables inconnues du problème; et si l'on suppose que l'on ait intégré complètement les équations du mouvement en négligeant les nouvelles forces, les valeurs de φ, ψ, θ, etc., seront des fonctions données de t et d'un certain nombre de constantes arbitraires, que nous continuerons de désigner par a, b, c, etc. Or il est facile de s'assurer que le nombre de ces constantes sera toujours double de celui des inconnues φ, ψ, θ, etc.; si donc, pour résoudre le problème en ayant égard aux nouvelles forces, nous faisons varier a, b, c, etc., et que nous les regardions comme de nouvelles inconnues, leur nombre étant double de celui des inconnues qu'elles remplacent, nous pourrons nous donner arbitrairement autant d'équations de condition, qu'il y a de quantités φ, ψ, θ, etc. : nous

supposerons que la différentielle de chacune de ces quantités, prise par rapport à la totalité des inconnues a, b, c, etc., soit égale à zéro; hypothèse dont l'avantage sera d'empêcher les différentielles secondes de a, b, c, etc., de paraître dans les équations du mouvement; d'où il résultera que ces inconnues seront déterminées par des équations du premier ordre.

Dorénavant nous emploierons la caractéristique δ, pour indiquer une différentielle prise par rapport à la totalité des quantités a, b, c, etc., regardées comme des fonctions de t; et nous conserverons Δ pour marquer une variation infiniment petite, relative à une ou plusieurs de ces mêmes quantités, auxquelles on attribue des accroissemens arbitraires: la caractéristique d indiquera toujours une différentielle relative au temps, et à tout ce qui en dépend. Nous aurons, d'après notre hypothèse,

$$\delta\varphi=0, \quad \delta\psi=0, \quad \delta\theta=0, \text{ etc.};$$

mais les coordonnées des mobiles étant des fonctions de φ, ψ, θ, etc., qui ne sauraient contenir explicitement les quantités a, b, c, etc., il s'ensuit qu'on aura aussi, pour chaque mobile,

$$\delta x=\frac{dx}{d\varphi}\delta\varphi+\frac{dx}{d\psi}\delta\psi+\frac{dx}{d\theta}\delta\theta+\text{etc.}=0,$$

$$\delta y=\frac{dy}{d\varphi}\delta\varphi+\frac{dy}{d\psi}\delta\psi+\frac{dy}{d\theta}\delta\theta+\text{etc.}=0,$$

$$\delta z=\frac{dz}{d\varphi}\delta\varphi+\frac{dz}{d\psi}\delta\mu+\frac{dz}{d\theta}\delta\theta+\text{etc.}=0;$$

c'est-à-dire que les coordonnées et leurs différentielles pre-

mières conserveront la même forme dans l'hypothèse de a, b, c, etc., variables, et dans celle de a, b, c, etc., constantes.

(6) Cela posé, soit, comme dans le n°. 1,

$$\frac{dx}{dt}=x', \quad \frac{dy}{dt}=y', \quad \frac{dz}{dt}=z';$$

en différenciant par rapport à t et à a, b, c, etc., regardées comme fonctions de t, on aura

$$\frac{d^2 x}{dt}=\frac{dx'}{dt}dt+\delta x',$$

$$\frac{d^2 y}{dt}=\frac{dy'}{dt}dt+\delta y',$$

$$\frac{d^2 z}{dt}=\frac{dz'}{dt}dt+\delta z';$$

substituant ces valeurs dans les équations (m'), qui doivent coïncider avec les équations (m) du n°. 1, dans l'hypothèse de a, b, c, etc., constantes, on en conclut

$$m\delta x'=(x)dt+(\lambda'-\lambda)\frac{dL}{dx}dt+(\mu'-\mu)\frac{dM}{dx}dt+\text{etc.},$$

$$m\delta y'=(y)dt+(\lambda'-\lambda)\frac{dL}{dy}dt+(\mu'-\mu)\frac{dM}{dy}dt+\text{etc.},$$

$$m\delta z'=(z)dt+(\lambda'-\lambda)\frac{dL}{dz}dt+(\mu'-\mu)\frac{dM}{dz}dt+\text{etc.}$$

Je multiplie ces trois équations respectivement par Δx, Δy, Δz; je les ajoute ensuite, et au moyen de la caractéristique Σ, j'étends la somme à tous les points du système; observant de plus que les facteurs $\lambda'-\lambda$, $\mu'-\mu$, etc., peu-

vent être mis en-dehors de cette caractéristique, il vient

$$\Sigma m(\Delta x\,\delta x'+\Delta y\,\delta y'+\Delta z\,\delta z')=\Sigma((x)\Delta x+(y)\Delta y+(z)\Delta z)\,dt$$
$$+(\lambda'-\lambda)\Delta L\,dt+(\mu'-\mu)\Delta M\,dt+\text{etc.};$$

mais on a (n°. 1) $\Delta L=0$, $\Delta M=0$, etc.; faisant donc, pour abréger,

$$\Sigma((x)\Delta x+(y)\Delta y+(z)\Delta z)=\nabla,$$

on aura cette équation indépendante des conditions du système :

$$\Sigma m(\Delta x\,\delta x'+\Delta y\,\delta y'+\Delta z\,\delta z')=\nabla\,dt.$$

On peut faire coïncider cette seconde valeur de ∇ avec la formule (1) du n° 1, en en retranchant la quantité

$$\Sigma m(\Delta x'\,\delta x+\Delta y'\,\delta y+\Delta z'\,\delta z),$$

laquelle est identiquement nulle, à cause de

$$\delta x=0,\quad \delta y=0,\quad \delta z=0.$$

On aura alors

$$\nabla\,dt=\Sigma m(\Delta x\,\delta x'-\Delta x'\,\delta x+\Delta y\,\delta y'-\Delta y'\,\delta y$$
$$+\Delta z\,\delta z'-\Delta z'\,\delta z); \qquad (6)$$

mais il faut observer que les quantités a, b, c, etc., étant devenues variables, la différentielle de cette formule n'est plus nulle, comme dans le n°. 1, où ces quantités étaient supposées constantes.

(7) Cette formule se décompose en autant d'autres équations qu'il y a de quantités a, b, c, etc. En effet, d'après les notations convenues (n°. 5), on a

$$\delta x = \frac{dx}{da} da + \frac{dx}{db} db + \frac{dx}{dc} dc + \text{etc.},$$

$$\delta x' = \frac{dx'}{da} da + \frac{dx'}{db} db + \frac{dx'}{dc} dc + \text{etc.},$$

$$\Delta x = \frac{dx}{da} \Delta a + \frac{dx}{db} \Delta b + \frac{dx}{dc} \Delta c + \text{etc.},$$

$$\Delta x' = \frac{dx'}{da} \Delta a + \frac{dx'}{db} \Delta b + \frac{dx'}{dc} \Delta c + \text{etc.};$$

et de même pour toutes les autres coordonnées. Je substitue ces valeurs dans le second membre de l'équation (6); j'ordonne tous les termes par rapport aux variations Δa, Δb, Δc, etc.; et en faisant usage de la notation du n°. 2, je trouve

$$\nabla dt = [(a, b)\, db + (a, c)\, dc + \text{etc.}]\, \Delta a + [(b, a)\, da + (b, c)\, dc + \text{etc.}]\, \Delta b + [(c, a)\, da + (c, b)\, db + \text{etc.}]\, \Delta c + \text{etc.}$$

Substituons de même les valeurs de Δx, Δy, Δz, dans la première expression de ∇ du numéro précédent; ordonnons aussi par rapport à Δa, Δb, Δc, etc.; et désignons par (a), (b), (c), etc., les coëfficients de ces variations : nous aurons en second lieu

$$\nabla = (a)\, \Delta a + (b)\, \Delta b + (c)\, \Delta c + \text{etc.};$$

en supposant

$$(a) = \Sigma\left((x)\frac{dx}{da} + (y)\frac{dy}{da} + (z)\frac{dz}{da}\right),$$

et de même pour les autres quantités (b), (c), etc. Or ces deux expressions de ∇ doivent être identiques par rapport

aux variations Δa, Δb, Δc, etc., qui sont arbitraires et indépendantes entre elles; égalant donc leurs coëfficients de part et d'autre, on aura

$$(a)\, dt = (a,\, b)\, db + (a,\, c)\, dc + \text{etc.},$$
$$(b)\, dt = (b,\, a)\, da + (b,\, c)\, dc + \text{etc.},$$
$$(c)\, dt = (c,\, a)\, da + (c,\, b)\, db + \text{etc.},$$
etc.

Ces équations sont en même nombre que a, b, c, etc., et les différentielles de ces quantités y sont multipliées par des fonctions de a, b, c, etc., qui ne renferment pas le temps explicitement; par les simples règles de l'élimination, on en déduira donc, dans chaque cas particulier, des valeurs de da, db, dc, etc., dans lesquelles les coëfficiens de (a), (b), (c), etc., seront aussi des fonctions de a, b, c, etc., indépendantes de la variable t; mais il ne paraît pas qu'on puisse parvenir, par ce moyen, aux expressions générales de ces différentielles.

(8) Au lieu de partir des équations du mouvement entre les coordonnées des mobiles, si nous eussions employé les équations entre les variables indépendantes, réduites au moindre nombre possible, comme dans le nº 3, nous aurions obtenu, par une analyse semblable à la précédente, d'autres expressions des quantités (a), (b), (c), etc., savoir :

$$(a)\, dt = (\overline{a,\, b})\, db + (\overline{a,\, c})\, dc + \text{etc.},$$
$$(b)\, dt = (\overline{b,\, a})\, da + (\overline{b,\, c})\, dc + \text{etc.},$$
$$(c)\, dt = (\overline{c,\, a})\, da + (\overline{c,\, b})\, db + \text{etc.},$$
etc.;

où les notations telles que $(\overline{a, b})$, représentent les mêmes quantités que dans le n° 3, et sont des fonctions de a, b, c, etc., indépendantes du temps.

Ces formules sont dues à M. Lagrange, qui les a données dans son premier Mémoire sur *la Théorie générale de la variation des constantes arbitraires* (*). Elles coïncident avec les précédentes, lorsque les mobiles sont libres et indépendans entre eux; mais, dans le cas général, elles en diffèrent par la forme des coëfficiens des différentielles da, db, dc, etc., qui sont exprimés dans les unes, au moyen des variables, indépendantes, et dans les autres, au moyen des coordonnées des mobiles. Il existe d'autres formules, inverses de celles de M. Lagrange, qui donnent directement les différentielles da, db, dc, etc., au moyen des quantités (a), (b), (c), etc., et que l'on obtient de la manière suivante.

(9) En ayant égard aux nouvelles forces, ajoutées à celles qui agissaient primitivement sur les mobiles, les équations du mouvement du n°. 3 deviendront

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt}-\frac{dT}{d\varphi}+\frac{dV}{d\varphi}&=(\varphi), \\ \frac{dv}{dt}-\frac{dT}{d\psi}+\frac{dV}{d\psi}&=(\psi), \\ \frac{ds}{dt}-\frac{dT}{d\theta}+\frac{dV}{d\theta}&=(\theta), \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

On désigne ici par (φ), (ψ), (θ), etc., les coëfficiens de $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$, $\Delta\theta$, etc., dans la quantité ∇ du n° 6, quand on y exprime les coordonnées des mobiles en fonctions des

(1) Mémoires de la Ire Classe de l'Institut, année 1809.

variables indépendantes, c'est-à-dire que l'on a maintenant

$$\nabla = (\varphi)\,\Delta\varphi + (\psi)\,\Delta\psi + (\theta)\,\Delta\theta + \text{etc.},$$

de la même manière que nous avons supposé (nº. 7)

$$\nabla = (a)\,\Delta a + (b)\,\Delta b + (c)\,\Delta c + \text{etc.},$$

lorsque nous regardions les coordonnées des mobiles, comme des fonctions de a, b, c, etc.

Cette forme des équations générales du mouvement, est une extension des équations connues de la mécanique analytique, qui se rapportent au cas où la formule ∇ est une différentielle exacte par rapport aux variables φ, ψ, θ, etc., et où parconséquent (φ), (ψ), (θ), etc. sont des différences partielles relatives à φ, ψ, θ, etc.

(10) Maintenant supposons qu'on ait intégré complètement les équations (7), en faisant abstraction de leurs seconds membres; a, b, c, etc., étant les constantes arbitraires contenues dans leurs intégrales, chacune d'elles pourra être exprimée en fonction de t, φ, ψ, θ, etc., φ', ψ', θ', etc., ou, si l'on veut, en fonction de t, φ, ψ, θ, etc., u, v, s, etc., à cause que φ', ψ', θ', etc. peuvent être exprimées elles-mêmes au moyen des dernières variables : on aura donc, dans la seconde hypothèse,

$$a = \text{fonct.}\,(t, \varphi, \psi, \theta, \text{etc.}, u, v, s, \text{etc.});$$

et cette équation sera une des intégrales premières des équations (7), quand on suppose nulles, les quantités (φ), (ψ), (θ), etc. Parconséquent, pour satisfaire à ces équations avec leurs seconds membres, si l'on regarde a comme une nouvelle variable; que l'on prenne sa différentielle complète, et que l'on y substitue pour du, dv, ds, etc. leurs valeurs

tirées des équations (7), tous les termes s'y détruiront, excepté ceux qui seront multipliés par (φ), (ψ), (θ), etc.; de sorte que l'on aura simplement

$$da=\frac{da}{du}(\varphi)\,dt+\frac{du}{dv}(\psi)\,dt+\frac{da}{ds}(\theta)\,dt+\text{etc.}$$

On aura des expressions semblables pour les différentielles des autres quantités b, c, etc., devenues variables; il ne reste donc plus, pour obtenir les valeurs de ces différentielles que nous cherchons, qu'à exprimer les coëfficiens (φ), (ψ), (θ), etc., au moyen des coëfficiens (a), (b), (c), etc.

(11) Pour cela, je différencie par rapport à la caractéristique Δ, les quantités a, b, c, etc., regardées comme des fonctions de φ, ψ, θ, etc., u, v, s, etc.; il vient

$$\Delta a=\frac{da}{d\varphi}\Delta\varphi+\frac{da}{d\psi}\Delta\psi+\text{etc.}+\frac{da}{du}\Delta u+\frac{da}{dv}\Delta v+\text{etc.},$$

$$\Delta b=\frac{db}{d\varphi}\Delta\varphi+\frac{db}{d\psi}\Delta\psi+\text{etc.}+\frac{db}{du}\Delta u+\frac{db}{dv}\Delta v+\text{etc.},$$

$$\Delta c=\frac{dc}{d\varphi}\Delta\varphi+\frac{dc}{d\psi}\Delta\psi+\text{etc.}+\frac{dc}{du}\Delta u+\frac{dc}{dv}\Delta v+\text{etc.},$$

etc.

Je substitue ces valeurs dans la seconde expression de ∇ du n°. 9; et en l'égalant à la première, on a

$$\begin{aligned}(\varphi)\Delta\varphi+(\psi)\Delta\psi+(\theta)\Delta\theta+\text{etc.}=&\\ &\left[\frac{da}{d\varphi}(a)+\frac{db}{d\varphi}(b)+\frac{dc}{d\varphi}(c)+\text{etc.}\right]\Delta\varphi\\ +&\left[\frac{da}{d\psi}(a)+\frac{db}{d\psi}(b)+\frac{dc}{d\psi}(c)+\text{etc.}\right]\Delta\psi\\ +&\left[\frac{da}{d\theta}(a)+\frac{db}{d\theta}(b)+\frac{dc}{d\theta}(c)+\text{etc.}\right]\Delta\theta\\ +&\ \text{etc.}\end{aligned}$$

$$+\left[\frac{da}{du}(a)+\frac{db}{du}(b)+\frac{dc}{du}(c)+\mu\right]\Delta u$$

$$+\left[\frac{da}{dv}(a)+\frac{db}{dv}(b)+\frac{dc}{dv}(c)+\text{etc.}\right]\Delta v$$

$$+\left[\frac{da}{ds}(a)+\frac{db}{ds}(b)+\frac{dc}{ds}(c)+\text{etc.}\right]\Delta s$$

$$+\text{ etc.}$$

Or les variations $\Delta a, \Delta b, \Delta c$, etc. étant arbitraires et indépendantes, les variations, en nombre égal, $\Delta\varphi, \Delta\psi, \Delta\theta$, etc., Δu, Δv, Δs, etc., le sont aussi; les coëfficiens de chacune de celles-ci, doivent donc être égaux dans les deux membres de cette équation; d'où il résulte d'abord

$$(\varphi)=\frac{da}{d\varphi}(a)+\frac{db}{d\varphi}(b)+\frac{dc}{d\varphi}(c)+\text{etc.},$$

$$(\psi)=\frac{da}{d\psi}(a)+\frac{db}{d\psi}(b)+\frac{dc}{d\psi}(c)+\text{etc.},$$

$$(\theta)=\frac{da}{u\theta}(a)+\frac{db}{d\theta}(b)+\frac{dc}{d\theta}(c)+\text{etc.},$$

$$\text{etc.};$$

et à cause que $\Delta u, \Delta v, \Delta s$, etc., se trouvent dans le second membre, sans entrer dans lé premier, on aura aussi

$$\frac{da}{du}(a)+\frac{db}{du}(b)+\frac{dc}{du}(c)+\text{etc.}=0,$$

$$\frac{da}{dv}(a)+\frac{db}{dv}(b)+\frac{dc}{dv}(c)+\text{etc.}=0,$$

$$\frac{da}{ds}(a)+\frac{db}{ds}(b)+\frac{dc}{ds}(c)+\text{etc.}=0,$$

$$\text{etc.}$$

Au moyen de ces valeurs de $(\varphi), (\psi), (\theta)$, etc., l'expression

de da du numéro précédent devient

$$da = \left[\frac{da}{d\varphi}\frac{da}{du} + \frac{da}{d\psi}\frac{da}{dv} + \frac{da}{d\theta}\frac{da}{ds} + \text{etc.}\right].(a)\,dt$$
$$+ \left[\frac{db}{d\varphi}\frac{da}{du} + \frac{db}{d\psi}\frac{da}{dv} + \frac{db}{d\theta}\frac{da}{ds} + \text{etc.}\right].(b)\,dt$$
$$+ \left[\frac{dc}{d\varphi}\frac{da}{du} + \frac{dc}{d\psi}\frac{da}{dv} + \frac{dc}{d\theta}\frac{da}{ds} + \text{etc.}\right].(c)\,dt$$
$$+ \text{etc.}$$

Je multiplie les équations précédentes respectivement par $\frac{da}{d\varphi}$, $\frac{da}{d\psi}$, $\frac{da}{d\theta}$, etc.; j'en fais la somme que je retranche en suite de la valeur de da : en adoptant la notation de la formule (5) du n° 3, il vient

$$da = [a, b].(b)\,dt + [a, c].(c)\,dt + \text{etc.};$$

et l'on aura semblablement

$$db = [b, a].(a)\,dt + [b, c].(c)\,dt + \text{etc.},$$
$$dc = [c, a].(a)\,dt + [c, b].(b)\,dt + \text{etc.},$$
$$\text{etc.};$$

expressions dans lesquelles les coëfficiens de (a), (b), (c), etc., sont des fonctions de a, b, c, etc., qui ne renferment pas le temps d'une manière explicite.

Ces formules sont celles qui se trouvent dans mon Mémoire déja cité, sur *la variation des constantes arbitraires ;* mais alors j'avais supposé la quantité que nous désignons par V, une différentielle exacte par rapport aux variables φ, ψ, θ, etc.; et, quoiqu'il fût aisé de voir que mon analyse ne

dépendait pas de cette hypothèse, j'ai cru qu'il était bon de la reproduire ici, en ne s'assujétissant à aucune supposition.

(12) Les différentielles des constantes arbitraires se réduisent à la forme la plus simple, lorsqu'on prend pour ces constantes les valeurs initiales des variables φ, ψ, θ, etc.; u, v, s, etc.; ce qui est toujours permis. Supposons, en effet, que l'origine du mouvement réponde à $t=o$, et qu'alors on ait

$$\varphi=a,\ \psi=b,\ \theta=c,\ \text{etc.},$$
$$u=a',\ v=b',\ s=c',\ \text{etc.};$$

on aura, en même temps,

$$\frac{da}{d\varphi}=1,\ \frac{db}{d\psi}=1,\ \frac{dc}{d\theta}=1,\ \text{etc.};$$
$$\frac{da'}{du}=1,\ \frac{db'}{dv}=1,\ \frac{dc'}{ds}=1,\ \text{etc.};$$

et toutes les autres différences partielles de a, b, c, etc., a', b', c', etc., relatives à φ, ψ, θ, etc., u, v, s, etc., seront égales à zéro. D'après cela, les coëfficiens des quantités (a), (b), (c), etc., (a'), (b'), (c'), etc., seront tous nuls quand $t=o$, excepté les suivans, qui deviendront

$$[a,\ a']=-[a',\ a]=-1,$$
$$[b,\ b']=-[b',\ b]=-1,$$
$$[c,\ c']=-[c',\ c]=-1,$$
etc.

Donc, puisque la variable t doit disparaître d'elle-même dans chacun de ces coëfficiens, il s'ensuit qu'ils conserveront les mêmes valeurs, lorsqu'elle ne sera plus nulle; par consé-

quent on aura, à un instant quelconque,

$$da = -(a')\,dt, \quad da' = (a)\,dt;$$
$$db = -(b')\,dt, \quad db' = (b)\,dt;$$
$$dc = -(c')\,dt, \quad dc' = (c)\,dt;$$
etc.

Ce système de constantes arbitraires ne se présente pas ordinairement dans les questions de mécanique; néanmoins il était bon de donner les formules qui s'y rapportent, à cause de leur simplicité et de l'usage que nous en ferons dans la suite de ce Mémoire. Relativement à d'autres constantes, le calcul des coëfficiens qui entrent dans l'expression de leurs différentielles, est bien loin d'être aussi simple : si la question présente trois variables indépendantes, comme le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, et le mouvement de rotation d'un corps solide, on a alors six constantes arbitraires, et, par conséquent, quinze coëfficiens à calculer; or, dans mon premier Mémoire sur ce sujet, j'ai calculé directement les quinze coëfficiens pour chacun de ces deux problêmes, et l'on a pu voir combien ce calcul est long et pénible. Mais il y a certaines constantes dont on peut trouver les différentielles d'une manière beaucoup plus simple, et toujours sous la forme du numéro précédent; ce sont celles qui complètent les intégrales fournies par les principes généraux de la mécanique : elles ont cela de particulier que l'expression de leurs différentielles est la même pour tous les problêmes, ainsi qu'on va le voir dans le paragraphe suivant.

§. III.

Expressions relatives à des constantes particulières.

(13) Représentons par

$$a = P,$$

une intégrale première des équations du mouvement du n° 1, résolue par rapport à la constante arbitraire a, et telle que P soit une fonction donnée du temps t, des coordonnées orthogonales des mobiles, et de leurs différentielles premières. En différenciant cette équation, désignant par x', y', z', les quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, et substituant pour $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, leurs valeurs tirées des équations (m) du n° 1, on aura

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &+ \Sigma\left(\frac{dP}{dx}x' + \frac{dP}{dy}y' + \frac{dP}{dz}z'\right) - \Sigma\frac{1}{m}\left(\frac{dV}{dx}\frac{dP}{dx} + \frac{dV}{dy}\frac{dP}{dy}\right.\\ &\left.+ \frac{dV}{dz}\frac{dP}{dz}\right) + \lambda\Sigma\frac{1}{m}\left(\frac{dL}{dx}\frac{dP}{dx} + \frac{dL}{dy}\frac{dP}{dy} + \frac{dL}{dz}\frac{dP}{dz}\right) + \mu\Sigma\frac{1}{m}\left(\frac{dM}{dx}\frac{dP}{dx}\right.\\ &\left.+ \frac{dM}{dy}\frac{dP}{dy} + \frac{dM}{dz}\frac{dP}{dz}\right) + \text{etc.} = 0,\end{aligned}$$

où la caractéristique Σ indique toujours une somme relative à tous les points du système. Or, si l'intégrale $a = P$, est fournie par l'un des principes généraux de la conservation des forces vives, des aires, ou du mouvement du centre de gravité, il est facile de vérifier que, dans l'équation qui s'en déduit, chacun des termes multipliés par λ, μ, etc., sera séparément nul ; ce qui est d'ailleurs évident, *à priori*, par la considération qu'une semblable intégrale satisferait encore aux équations du mouvement, lors même que les points du

système deviendraient libres, ou qu'une partie seulement des équations de condition $L=0$, $M=0$, etc., cesserait d'avoir lieu. Ainsi l'équation précédente se décomposera en ces équations :

$$\frac{dP}{dt}+\Sigma\left(\frac{dP}{dx}x'+\frac{dP}{dy}y'+\frac{dP}{dz}z'\right)-\Sigma\frac{1}{m}\left(\frac{dV}{dx}\frac{dP}{dx}+\frac{dV}{dy}\frac{dP}{dy}+\frac{dV}{dz}\frac{dP}{dz}\right)=0,$$

$$\Sigma\frac{1}{m}\left(\frac{dL}{dx}\frac{dP}{dx}+\frac{dL}{dy}\frac{dP}{dy}+\frac{dL}{dz}\frac{dP}{dz}\right)=0,$$

$$\Sigma\frac{1}{m}\left(\frac{dM}{dx}\frac{dP}{dx}+\frac{dM}{dy}\frac{dP}{dy}+\frac{dM}{dz}\frac{dP}{dz}\right)=0,$$

etc.

Maintenant pour étendre l'intégrale $a=P$, aux équations du mouvement du n° 5, considérons a comme variable, et différencions, dans cette hypothèse, cette équation $a=P$: en substituant à la place de $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, leurs valeurs tirées des équations (m') de ce numéro, on verra que tous les termes se détruisent en vertu des équations précédentes, excepté ceux qui sont multipliés par les nouvelles forces (x), (y), (z); de sorte que si l'on conserve a, à la place de sa valeur P, on aura simplement

$$da=\Sigma\frac{1}{m}\left[\frac{da}{dx'}(x)+\frac{da}{dy'}(y)+\frac{da}{dz'}(z)\right]dt. \qquad (8)$$

Il ne s'agira donc plus que de mettre cette valeur de da sous la même forme que dans le n° 11, c'est-à-dire de l'exprimer au moyen des quantités que nous avons désignées par (a), (b), (c), etc., et dont le type général est (n° 7)

$$(c)=\Sigma\left[\frac{dx}{dc}(x)+\frac{dy}{dc}(y)+\frac{dz}{dc}(z)\right]. \qquad (9).$$

C'est ce que nous allons faire successivement pour chacune des intégrales premières, résultantes des principes généraux de la mécanique.

(14) Considérons d'abord l'intégrale fournie par le principe des forces vives : en désignant par h, la constante arbitraire qu'elle contient elle sera, comme on sait,

$$h = V + \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m}(x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

on en déduit

$$\frac{dh}{dx'} = mx', \quad \frac{dh}{dy'} = my', \quad \frac{dh}{dz'} = mz';$$

mettant donc h à la place de a dans l'équation (8), on aura

$$dh = \Sigma\,[x'(x) + y'(y) + z'(z)]\,dt.$$

Or le principe des forces vives suppose que la fonction V ne contient pas le temps explicitement; les équations du mouvement du n° 1, ne renferment donc que l'élément de cette variable; par conséquent une des constantes arbitraires, contenues dans leurs intégrales, doit être ajoutée au temps; de sorte qu'en supposant que c soit cette cette constante, les coordonnées des mobiles doivent être des fonctions de $t + c$. Nous aurons donc

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dc}, \quad y' = \frac{dy}{dc}, \quad z' = \frac{dz}{dc};$$

d'où il suit

$$dh = \Sigma\left[\frac{dx}{dc}(x) + \frac{dy}{dc}(y) + \frac{dz}{dc}(z)\right]dt;$$

et, à cause de l'équation (9),

$$dh = (c)\,dt.$$

Cette valeur de dh est, comme on voit, ramenée à la forme générale du nº 11; et comme il arrive ici que (c) est la seule des quantités (a), (b), (c), etc., qu'elle renferme, il en faut conclure que tous les coëfficiens $[h,a]$, $[h,b]$, etc., sont nuls, excepté $[h, c]$, qui sera égal à l'unité; résultat qui nous sera utile dans la suite de ce Mémoire.

(15). Si l'on suppose que les forces comprises dans la fonction V, proviennent uniquement de l'action mutuelle des points du système, on aura, d'après le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité,

$$Mg = \Sigma m x', \quad Mg' = \Sigma m y', \quad Mg'' = \Sigma m z';$$
$$Mf + Mg\,t = \Sigma m x,$$
$$Mf' + Mg'\,t = \Sigma m y,$$
$$Mf'' + Mg''\,t = \Sigma m\, z;$$

M désignant la somme de toutes les masses, et f, f', f'', g, g', g'', des constantes arbitraires. De plus X, Y, Z, étant des quantités indépendantes de ces six constantes, les coordonnées du point quelconque m seront de la forme :

$$x = f + g\,t + X,$$
$$y = f' + g'\,t + Y,$$
$$z = f'' + g''\,t + Z;$$

et de même pour les coordonnées des autres mobiles.

On tire de là

$$M\frac{dg}{dx'} = m, \quad \frac{dg}{dy'} = 0, \quad \frac{dg}{dz'} = 0;$$
$$\frac{dx}{df} = 1, \quad \frac{dy}{df} = 0, \quad \frac{dz}{df} = 0;$$

mettant donc g à la place de a dans l'équation (8), et f a la place de c dans l'équation (9), on aura

$$\text{M}\,dg = \Sigma(x)\,dt, \quad (f) = (x);$$

d'où il résulte

$$\text{M}\,dg = (f)\,dt;$$

et l'on trouvera de même

$$\text{M}\,dg' = (f')\,dt, \quad \text{M}\,dg'' = (f'')\,dt.$$

Ces équations donnent les valeurs de dg, dg', dg'', sous la forme démandée. Pour obtenir de même les différentielles de f, f', f'', j'élimine d'abord g de l'équation qui détermine f; ce qui donne

$$\text{M}f + t\Sigma m x' = \Sigma m x;$$

d'où je conclus

$$\text{M}\frac{dg}{dx'} = -tm, \quad \frac{df}{dy'} = 0, \quad \frac{df}{dz'} = 0;$$

j'ai d'ailleurs

$$\frac{dx}{dg} = t, \quad \frac{dy}{dg} = 0, \quad \frac{dz}{dg} = 0:$$

les équations (8) et (9) donneront donc

$$\text{M}\,df = -t\Sigma(x)\,dt, \quad (g) = t\Sigma(x),$$

et par conséquent

$$\text{M}\,df = -(g)\,dt.$$

On trouvera de même

$$\text{M}\,df' = -(g')\,dt, \quad \text{M}\,df'' = -(g'')\,dt.$$

(16) Considérons enfin les intégrales résultantes du principe de la conservation des aires, lequel suppose d'abord que les mobiles ne sont sollicités que par leur action mutuelle et par une force dirigée constamment vers l'origine des coordonnées, et, de plus, que le système peut tourner librement autour de cette origine.

En vertu de ce principe, nous aurons

$$l = \Sigma m(xy' - yx'),$$
$$l' = \Sigma m(zx' - xz'),$$
$$l'' = \Sigma m(yz' - zy');$$

l, l', l'', étant des constantes arbitraires. On en déduit

$$\frac{dl}{dx'} = -my, \quad \frac{dl}{dy'} = mx, \quad \frac{dl}{dz'} = 0;$$
$$\frac{dl'}{dx'} = mz, \quad \frac{dl'}{dy'} = 0, \quad \frac{dl'}{dz'} = -mx;$$
$$\frac{dl''}{dx'} = 0, \quad \frac{dl''}{dy'} = -mz, \quad \frac{dl''}{dz'} = my;$$

donc en mettant successivement l, l', l'', à la place de a dans l'équation (8), nous aurons

$$dl = \Sigma[x(y) - y(x)]\,dt,$$
$$dl' = \Sigma[z(x) - x(z)]\,dt,$$
$$dl'' = \Sigma[y(z) - z(y)]\,dt;$$

mais pour ramener ces différentielles à la forme de celles du n° 11, il est nécessaire de recourir aux formules connues de la transformation des coordonnées.

Soient donc p, q, r, les nouvelles coordonnées orthogo-

nales du point m, rapportées à la même origine que x, y, z. Désignons par γ, l'angle compris entre l'axe des r et celui des z; par α, l'angle que fait l'intersection du plan des p et q, avec l'axe des x; par ϵ, l'angle compris entre cette même intersection et l'axe des p; et pour qu'il ne reste aucune ambiguité sur le sens dans lequel ces angles sont comptés, supposons que les angles α et ϵ comprennent entre eux l'angle γ, aigu ou obtus, et que la projection de l'axe des r sur le plan des x, y, fait avec l'axe de x, un angle égal au complément de α : nous aurons alors, d'après les formules connues,

$$x = p\,(\sin.\alpha.\sin.\epsilon.\cos.\gamma + \cos.\alpha.\cos.\epsilon.)$$
$$+ q\,(\sin.\alpha.\cos.\epsilon.\cos.\gamma - \cos.\alpha.\sin.\epsilon) + r.\sin.\alpha.\sin.\gamma,$$
$$y = p\,(\cos.\alpha.\sin.\epsilon.\cos.\gamma - \sin.\alpha.\cos.\epsilon)$$
$$+ q\,(\cos.\alpha.\cos.\epsilon.\cos.\gamma + \sin.\alpha.\sin.\epsilon) + r.\cos.\alpha.\sin.\gamma,$$
$$z = -p.\sin.\epsilon.\sin.\gamma. - q.\cos.\epsilon.\sin.\gamma. + r.\cos.\gamma.$$

Or le système que nous considérons pouvant tourner librement autour de l'origine des coordonnées, les trois angles α, ϵ, γ, sont des constantes arbitraires ; et à cause que les forces qui agissent sur les mobiles, ne dépendent pas de la direction des coordonnées, on peut supposer les valeurs inconnues de p, q, r, indépendantes de ces constantes. Différenciant donc par rapport à α, dans cette hypothèse, on trouve

$$\frac{dx}{d\alpha} = y, \quad \frac{dy}{d\alpha} = -x, \quad \frac{dz}{d\alpha} = 0;$$

donc, en mettant α au lieu de c dans l'équation (9),

nous aurons

$$(\alpha) = \Sigma[y(x) - x(y)],$$

et par conséquent

$$dl = -(\alpha)\,dt;$$

expression qui a la forme demandée. Le calcul relatif à dl' et dl'' n'est pas aussi simple; nous allons en donner le détail dans le numéro suivant.

(17) Je représente, pour un moment, les valeurs précédentes de x, y, z, par

$$x = \mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C}r,$$
$$y = \mathrm{A}'p + \mathrm{B}'q + \mathrm{C}'r,$$
$$z = \mathrm{A}''p + \mathrm{B}''q + \mathrm{C}''r;$$

et j'observe que l'on aura réciproquement

$$p = \mathrm{A}x + \mathrm{A}'y + \mathrm{A}''z,$$
$$q = \mathrm{B}x + \mathrm{B}'y + \mathrm{B}''z,$$
$$r = \mathrm{C}x + \mathrm{C}'y + \mathrm{C}''z.$$

Cela posé, 1° je différencie par rapport à β; en faisant attention à la forme des coëfficiens de p, q, r, je trouve

$$\frac{dx}{d\beta} = \mathrm{B}p - \mathrm{A}q,$$
$$\frac{dy}{d\beta} = \mathrm{B}'p - \mathrm{A}'q,$$
$$\frac{dz}{d\beta} = \mathrm{B}''p - \mathrm{A}''q;$$

substituant pour p, q, r, leurs valeurs, on a

$$\frac{dx}{d\beta} = (\text{BA}' - \text{AB}')y + (\text{BA}'' - \text{AB}'')z,$$

$$\frac{dy}{d\beta} = (\text{B}'\text{A} - \text{A}'\text{B})x + (\text{B}'\text{A}'' - \text{A}'\text{B}'')z,$$

$$\frac{dz}{d\beta} = (\text{B}''\text{A} - \text{A}''\text{B})x + (\text{B}''\text{A}' - \text{A}''\text{B}')y;$$

en vertu de l'équation (9), nous aurons donc

$$(\beta) = (\text{BA}' - \text{AB}').\Sigma[y(x) - x(y)] + (\text{B}''\text{A} - \text{A}''\text{B}).\Sigma[x(z) - z(x)] + (\text{B}'\text{A}'' - \text{A}'\text{B}'').\Sigma[z(y) - y(z)];$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(\beta)dt = (\text{AB}' - \text{BA}')dl + (\text{A}''\text{B} - \text{B}''\text{A})dl' + (\text{A}'\text{B}'' - \text{B}'\text{A}'')dl''.$$

Or on sait et il est aisé de vérifier que

$$\text{AB}' - \text{BA}' = \text{C}'' = \cos.\gamma,$$

$$\text{A}''\text{B} - \text{B}''\text{A} = \text{C}' = \cos.\alpha.\sin.\gamma,$$

$$\text{A}'\text{B}'' - \text{B}'\text{A}'' = \text{C} = \sin.\alpha.\sin.\gamma;$$

on aura donc enfin

$$(\beta)dt = \cos.\gamma.dl + \cos.\alpha.\sin.\gamma.dl' + \sin.\alpha.\sin.\gamma.dl''. \quad (10)$$

2° Je différencie les valeurs de x, y, z, par rapport à γ; il vient

$$\frac{dx}{d\gamma} = (\text{A}''p + \text{B}''q + \text{C}''r).\sin.\alpha = z.\sin.\alpha,$$

$$\frac{dy}{d\gamma} = (\text{A}''p + \text{B}''q + \text{C}''r).\cos.\alpha = z.\cos.\alpha,$$

$$\frac{dz}{d\gamma} = -(p.\sin.\beta + q.\cos.\beta)\cos.\gamma - r.\sin.\gamma;$$

mettant pour p, q, r, leurs valeurs dans cette dernière

équation, et réduisant, on trouve

$$\frac{dz}{d\gamma} = -x.\,sin.\,\alpha - y.\,cos.\,\alpha;$$

donc, en vertu de l'équation (9), on aura

$$(\gamma) = sin.\,\alpha.\,\Sigma[z(x) - x(z)] - cos.\,\alpha.\,\Sigma[y(z) - z(y)];$$

ce qui est la même chose que

$$(\gamma)\,dt = sin.\,\alpha.\,dl' - cos.\,\alpha.\,dl''. \qquad (11)$$

3° En observant que $dl = -(\alpha)\,dt$, je tire des équations (10) et (11), les valeurs cherchées de dl' et dl'', savoir :

$$dl' = \frac{cos.\,\alpha}{sin.\,\gamma}.(6)\,dt + \frac{cos.\,\alpha.\,cos.\,\gamma}{sin.\,\gamma}.(\alpha)\,dt + sin.\,\alpha.\,(\gamma)\,dt,$$

$$dl'' = \frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\gamma}.(6)\,dt + \frac{sin.\,\alpha.\,cos.\,\gamma}{sin.\,\gamma}.(\alpha)\,dt - cos.\,\alpha.\,(\gamma)\,dt.$$

(18) Jusqu'ici, rien ne spécifie le plan que nous avons pris pour celui des coordonnées p et q; supposons maintenant que ce soit le plan du *maximum des aires*, dont la direction dépend, comme on sait, des valeurs des quantités l, l', l'', de manière qu'il est *invariable*, lorsque ces quantités sont constantes, et qu'il change de direction, quand elles deviennent variables. En appelant k, la somme des aires relatives à ce plan, et observant que $cos.\,\gamma$, $cos.\,\alpha.\,sin.\,\gamma$, $sin.\,\alpha.\,sin.\,\gamma$, sont les cosinus des angles que l'axe des r, qui lui est perpendiculaire, fait avec les axes des z, y, x, on aura, d'après la théorie connue de la projection des aires,

$$l = k.\,cos.\,\gamma, \quad l' = k.\,cos.\,\alpha.\,sin.\,\gamma, \quad l'' = k.\,sin.\,\alpha.\,sin.\,\gamma;$$

et l'on pourra remplacer les trois constantes arbitraires l, l', l'', par les quantités k, α et γ.

Je différencie donc ces valeurs de l, l', l'', et je substitue leurs différentielles dans les équations (10) et (11), et dans $dl = -(\alpha)dt$; il vient

$$(\beta)dt = dk, \quad (\gamma)dt = -k.sin.\gamma.d\alpha,$$
$$(\alpha)dt = -cos.\gamma.dk + k.sin.\gamma.d\gamma;$$

d'où l'on tire

$$dk = (\beta)dt,$$
$$d\alpha = -\frac{1}{k.sin.\gamma}.(\gamma)dt,$$
$$d\gamma = \frac{1}{k.sin.\gamma}.(\alpha)dt + \frac{cos.\gamma}{k.sin.\gamma}.(\beta)dt,$$

pour les valeurs de dk, $d\alpha$, $d\gamma$, sous la forme du n° 11.

(19) Nous pouvons conclure de tout ce qui précède, qu'il y a dix constantes arbitraires dont on peut déterminer, *à priori*, les différentielles, savoir : les six constantes f, f', f'', g, g', g'', relatives au mouvement du centre de gravité du systême ; la constante h, qui entre dans l'équation des forces vives ; les angles α et γ, qui déterminent la direction du plan invariable ; et enfin la constante k, qui représente la somme des aires relatives à ce plan. Quant à l'angle β, compté dans le plan invariable, et à la constante c, ajoutée au temps, ce n'est que dans chaque cas particulier qu'on en pourra déterminer les différentielles, ainsi que celles des constantes contenues dans les autres intégrales relatives au problême qu'on se proposera de résoudre. S'il s'agit du mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, suivant

une fonction quelconque de la distance, ou du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, on n'aura pas à considérer les six constantes f, f', f'', g, g', g''; et, de plus, chacun de ces problèmes ne comportant que six constantes arbitraires, on pourra prendre, pour ces constantes, les six quantités $h, k, c, \alpha, \gamma, \epsilon$, comme je l'ai fait dans le Mémoire cité sur la variation des constantes arbitraires. Il ne restera alors à trouver que les différentielles de ϵ et de c; et d'après le nº 11, elles seront de la forme :

$$d\epsilon=[\epsilon,h].(h)dt+[\epsilon,k].(k)dt+[\epsilon,\alpha].(\alpha)dt+[\epsilon,\gamma].(\gamma)dt+[\epsilon,c].(c)dt,$$
$$dc=[c,h].(h)dt+[c,k].(k)dt+[c,\alpha].(\alpha)dt+[c,\gamma].(\gamma)dt+[c,\epsilon].(\epsilon)dt.$$

Or, dans le nº 14, nous avons vu qu'on devoit avoir

$$[\epsilon, h]=0, \quad [c, h]=-[h, c]=-1;$$

par la même raison, la quantité (c) n'entrant pas dans les valeurs précédentes de dk, $d\alpha$, $d\gamma$, on aura

$$[c, k]=0, \quad [c, \alpha]=0, \quad [c, \gamma]=0;$$

et si l'on fait attention aux coëfficiens de la quantité (ϵ) dans ces mêmes différentielles, on en conclura

$$[\epsilon, k]=-[k, \epsilon]=-1, \ [\epsilon, \alpha]=0, \ [\epsilon, \gamma]=-[\gamma, \epsilon]=-\frac{\cos.\gamma}{k\sin.\gamma}.$$

Donc, à cause de $[c, \epsilon]=-[\epsilon, c]$, les valeurs de $d\epsilon$ et dc se réduisent à

$$d\epsilon=-(k)dt-\frac{\cos.\gamma}{k.\sin.\gamma}.(\gamma)dt+[\epsilon,c].(c)dt,$$
$$dc=-(h)dt-[\epsilon, c].(\epsilon)dt;$$

de sorte que l'on n'aura plus que le coëfficient [β, c] à calculer.

On est obligé de recourir à la formule (5) du n° 3, pour déterminer la valeur de cette quantité; elle dépend de la ligne à laquelle répond l'angle β, compté dans le plan principal des momens, à partir de son intersection avec le plan fixe des x, y, et aboutissant à la ligne arbitraire que l'on a prise pour l'axe des p : si l'on suppose que cette ligne soit un rayon vecteur *maximum* ou *minimum* du mobile, dans le problême du mouvement d'un point autour d'un centre fixe, on trouve le coëfficient [β, c] égal à zéro; et dans celui du mouvement de rotation, on trouve également cette quantité nulle, en partant de la supposition que j'ai faite dans le Mémoire cité plus haut. J'ai donné, dans ce Mémoire, le calcul entier de la valeur de [β, c], et je me contenterai d'y renvoyer pour cet objet (*).

En supprimant donc ces derniers termes des valeurs de $d\beta$ et dc, on aura

$$d\beta = -(k)dt - \frac{\cos.\gamma}{k.\sin.\gamma}.(\gamma)dt,$$
$$dc = -(h)dt;$$

et ces formules, jointes à celles des n°s 14 et 18, détermineront les différentielles de toutes les constantes arbitraires, relatives, soit au mouvement de rotation d'un corps solide, soit au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe.

(20) Pour plus de généralité, nous n'avons pas supposé, dans toute notre analyse, les nouvelles forces qui font varier

(*) Journal de l'École Polytechnique, 15e cahier, pages 302 et 334.

les constantes arbitraires, assujéties à la condition que la somme de ces forces, multipliées chacune par l'élément de sa direction, fût une différentielle exacte relativement aux coordonnées des mobiles; de manière que nos formules peuvent servir à en calculer, par exemple, les altérations produites par la résistance d'un milieu, et généralement tous les genres de perturbations résultantes de forces données qu'on suppose très-petites par rapport à celles qui agissaient primitivement sur les mobiles. Lorsque la condition dont nous parlons aura lieu, la quantité v du n° 6, sera la différentielle exacte d'une fonction des variables indépendantes, et parconséquent aussi, d'une fonction des constantes arbitraires. Si l'on représente cette fonction par Ω, les coëfficiens désignés généralement par (a), (b), (c), etc. (n° 7), ne seront autre chose que les différences partielles de Ω, par rapport à a, b, c, etc.; faisant donc, dans les formules précédentes,

$$(h)=\frac{d\Omega}{dh},\ (k)=\frac{d\Omega}{dk},\ (c)=\frac{d\Omega}{dc}, \text{ etc.};$$

elles deviendront

$$dh=\frac{d\Omega}{dk}\cdot dt,$$

$$dc=-\frac{d\Omega}{dh}\cdot dt,$$

$$dk=\frac{d\Omega}{d\beta}\cdot dt,$$

$$d\alpha=-\frac{1}{k.\sin.\gamma}\cdot\frac{d\Omega}{d\gamma}\cdot dt,$$

$$d\gamma=\frac{1}{k.\sin.\gamma}\cdot\frac{d\Omega}{d\alpha}dt+\frac{\cos.\gamma}{k.\sin.\gamma}\cdot\frac{d\Omega}{d\beta}\cdot dt,$$

$$d\beta=-\frac{d\Omega}{dk}\cdot dt-\frac{\cos.\gamma}{k.\sin.\gamma}\cdot\frac{d\Omega}{d\gamma}\cdot dt;$$

6.

équations dont il est facile de reconnaître l'identité avec celles que j'ai trouvées dans mon premier Mémoire, par le calcul direct des quinze coëfficiens relatifs aux deux problêmes auxquels ces formules s'appliquent.

On peut remarquer qu'en désignant par d, une différentielle relative à la totalité des constantes arbitraires, on a $d\Omega=0$; propriété qui convient, en effet, à toute fonction des variables indépendantes, puisque la variation d de chacune de ces variables a été supposé nulle (nº 5); mais on voit de plus que, relativement à la fonction Ω, sa différentielle par rapport aux deux constantes h et c, est séparément nulle; de manière que l'équation $d\Omega=0$, se décompose en deux autres, savoir :

$$\frac{d\Omega}{dh}dh+\frac{d\Omega}{dc}dc=0,$$

$$\frac{d\Omega}{dk}dk+\frac{d\Omega}{d\alpha}d\alpha+\frac{d\Omega}{d\gamma}d\gamma+\frac{d\Omega}{d\beta}d\beta=0.$$

§ IV.

Application des formules précédentes aux variations des grands axes et des moyens mouvemens des planètes.

(21) Les théorêmes que nous allons démontrer dans ce paragraphe, supposent que les forces qui font varier les constantes arbitraires satisfont à la condition du numéro précédent; ils exigent de plus que la fonction relative à ces forces, que nous avons appelée Ω, soit développable en série convergente de sinus ou de cosinus d'arcs proportionnels au temps, et qu'il en soit de même à l'égard de ses différences partielles, prises par rapport aux constantes arbi-

traires; or, pour que cette dernière condition soit remplie, il est nécessaire que la différentiation du développement de Ω, par rapport à l'une de ces constantes, ne fasse pas sortir le temps hors des sinus ou cosinus : c'est ce que l'on obtiendra, dans le cas du mouvement des planètes, en faisant subir aux formules de la variation des constantes, la préparation que nous allons expliquer.

Supposons donc que la somme des forces perturbatrices, multipliées chacune par l'élément de sa direction, satisfasse à la condition d'intégrabilité du numéro précédent; supposons aussi que le principe des forces vives a lieu, par rapport aux forces qui agissaient primitivement sur les mobiles; on aura alors, quel que soit le système que l'on considère (nº 14),

$$dh = \frac{d\Omega}{dc}\,dt;$$

h étant la constante de l'équation des forces vives, et c, la constante ajoutée au temps dans les intégrales des équations du mouvement dû aux forces primitives. En même temps, la différentielle de cette constante c, devenue variable, sera de la forme :

$$dc = -\frac{d\Omega}{dh}\,dt + C\,dt;$$

en représentant par $C\,dt$, la somme des termes de sa valeur, qui peuvent contenir les différences partielles de Ω, relatives aux autres constantes arbitraires.

Imaginons enfin que dans les intégrales du mouvement primitif, le temps soit par-tout multiplié par une certaine fonction de h que nous désignerons par n. Les valeurs des coordonnées des mobiles qu'on tirera de ces intégrales et des

équations de condition du systême, seront des fonctions de $n(t+c)$, qui pourront encore contenir h, indépendamment de n. Il en sera de même de la fonction Ω, dans laquelle on aura substitué, à la place de ces coordonnées, leurs valeurs; par conséquent la différence partielle relative à h, se partagera en deux parties, savoir :

$$\frac{d\Omega}{dh}+\frac{t+c}{n}\cdot\frac{dn}{dh}\cdot\frac{d\Omega}{dc};$$

le premier terme représentant la partie relative à la quantité h qui entre explicitement dans Ω, et le second exprimant la différence partielle de Ω, prise par rapport à n, considérée comme une fonction de h. Mettant donc ces deux termes à la place de $\frac{d\Omega}{dh}$, dans la valeur de dc, on aura

$$dc=-\frac{d\Omega}{dh}dt-\frac{t+c}{n}\cdot\frac{dn}{dh}\cdot\frac{d\Omega}{dc}dt+C\,dt.$$

D'ailleurs on a identiquement

$$n(t+c)=\int n\,dt+\int t\,dn+nc;$$

si donc on fait

$$\int t\,dn+nc=\epsilon,$$

et si l'on considère Ω comme une fonction de $\int n\,dt+\epsilon$, au lieu de $n(t+c)$, on aura

$$d\epsilon=(t+c)dn+n\,dc,\quad \frac{d\Omega}{dc}=n\frac{d\Omega}{d\epsilon};$$

d'où l'on conclut

$$dh=n\frac{d\Omega}{d\epsilon}dt,$$

$$d\epsilon=-n\frac{d\Omega}{dh}dt+nC\,dt.$$

La constante c, se trouvera ainsi remplacée par ε, dont la la différentielle a conservé, au facteur n près, la même forme que celle de c; et, d'après ce qu'on a dit à la fin du n° 14, la différence partielle de Ω, par rapport à h, n'entrant pas dans les différentielles des autres constantes arbitraires, il n'y aura rien de changé à leurs expressions, si ce n'est qu'il y faudra mettre $n\frac{d\Omega}{d\varepsilon}$, à la place de $\frac{d\Omega}{dc}$.

(22) Toutes les suppositions que nous venons de faire, conviennent au mouvement elliptique d'une planète autour du soleil, ou d'un satellite autour de sa planète, troublé par l'action des autres corps célestes. En effet les coordonnées du mouvement elliptique s'expriment en fonctions de la longitude moyenne qui est de la forme $n(t+c)$; et le coëfficient n dépend du grand axe, lequel dépend lui-même de la constante des forces vives; car on a les équations connues

$$a=-\frac{\mu}{h}, \quad n=\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}};$$

dans lesquelles h est la même constante que précédemment, a, le demi-grand axe de l'orbite, et μ, une constante absolue qui exprime l'intensité de la pesanteur universelle à l'unité de distance. De plus Ω est une fonction donnée des coordonnées de la planète troublée et des planètes perturbatrices ; après qu'on y a substitué pour ces coordonnées leurs valeurs, elle devient une fonction des longitudes moyennes de ces planètes et des élémens elliptiques de leurs orbites; or, à cause de la petitesse des excentricités et des inclinaisons mutuelles de ces orbites, cette fonction Ω peut toujours se développer en série convergente de sinus ou de

cosinus d'arcs multiples des longitudes moyennes. Remplaçant donc celle de la planète troublée, ou $n(t+c)$, par $\int n\,dt+\varepsilon$, afin de n'avoir pas à différencier par rapport à la quantité h qui entre dans n, les différences partielles de Ω par rapport à h et aux autres constantes arbitraires, seront exprimées par des séries de même forme que Ω, qui ne contiendront pas le temps hors des sinus ou cosinus.

Les termes des développemens de Ω et de ses différences partielles sont des quantités très-petites, de l'ordre des masses des planètes comparées à la masse du soleil. Il y en a cependant que l'intégration fait croître dans un très-grand rapport; cela arrive principalement pour ceux qui sont indépendans des longitudes moyennes, et qui s'abaissent d'un ordre à chaque intégration. Comme ces termes ne renferment pas le temps explicitement, nous les appellerons, pour abréger, *non-périodiques;* et nous allons examiner s'il en existe dans l'expression du moyen mouvement, lequel sera représenté pour nt, pour le mouvement elliptique, et par l'intégrale $\int n\,dt$, dans le mouvement troublé.

(23) Soit $\int n\,dt=\rho$; de-là, et des équations précédentes, nous tirerons

$$d^2\rho=\mathrm{H}\frac{d\Omega}{d\varepsilon}dt^2,\quad da=\mathrm{H}'\frac{d\Omega}{d\varepsilon}dt,\quad dh=n\frac{d\Omega}{d\varepsilon}dt;$$

H et H' étant, ainsi que n, des fonctions données de h. Les seconds membres de ces trois équations sont, comme on voit, de la même forme; de manière que ce qui sera dit de l'un, conviendra également aux deux autres.

Lorsqu'on néglige les quantités du second ordre, par rap-

port aux forces perturbatrices, on doit, pour l'objet que nous nous proposons, considérer les élémens elliptiques contenus dans ces seconds membres, comme des constantes absolues; alors la différentiation relative à ε, fait disparaître les termes du développement de Ω, qui ne renferment pas la longitude moyenne de la planète troublée; par conséquent, les valeurs de $d^2\rho$, da, dh, ne contiennent pas de semblables termes, ni, à plus forte raison, de termes indépendans de cette longitude et de celles des autres planètes. On en peut rigoureusement conclure que si l'expression du grand axe renferme des inégalités séculaires, leurs coëfficiens sont du premier ordre ou d'un ordre supérieur, par rapport aux masses des planètes; car ces inégalités ne peuvent venir que des termes non-périodiques de la valeur de da, qui sont au moins du second ordre, et qui ne s'abaissent que d'un ordre par l'intégration. Mais les termes du moyen mouvement ρ, résultans d'une double intégration qui les abaisse de deux ordres, la même conclusion ne saurait leur être appliquée, à moins d'être certain que la valeur de $d^2\rho$ ne contient pas de termes non-périodiques du second ordre; ce qui rend indispensable de pousser l'approximation, au moins jusqu'aux quantités de cet ordre inclusivement.

Il sera nécessaire alors d'avoir égard à la variation des constantes arbitraires introduites dans Ω par les coordonnées de toutes les planètes dont on considère l'action mutuelle; mais, dans l'analyse suivante, nous n'aurons point égard à la réaction de la planète troublée sur les planètes perturbatrices, et nous nous occuperons seulement des termes qui proviennent des constantes relatives à la planète troublée. Ces constantes seraient naturellement les six élémens ellip-

tiques de cette planète; cependant on peut aussi les remplacer par six constantes quelconques, dont ces élémens soient des fonctions déterminées; et l'on verra bientôt l'avantage qui en résultera. Nous regarderons donc Ω comme une fonction du temps introduit par les coordonnées des planètes perturbatrices, du moyen mouvement ρ de la planète troublée, et de six constantes arbitraires, relatives à cette planète, que nous choisirons à volonté. D'après cela, nous représenterons un terme quelconque de son développement par

$$\Omega = G. \cos. (i\rho + gt + f);$$

i étant un nombre entier ou zéro; gt désignant un arc proportionnel au temps, qui provient des coordonnées des planètes perturbatrices, en sorte que le coëfficient g ne contient pas les constantes relatives à la planète troublée (*);

(*) Dans la théorie ordinaire des perturbations, où l'on ne considère que l'action isolée d'une planète sur une autre, cette quantité gt est un multiple du moyen mouvement de la planète perturbatrice; de sorte que si l'on représente ce moyen mouvement par ρ', et par i', un nombre entier quelconque, on a $gt = i'\rho'$. En concevant tous les termes du développement de Ω, qui dépendent des mêmes multiples de ρ et ρ', réduits à un seul terme, celui-ci se décomposera en quatre autres, savoir:

$$A \cos. i\rho . \cos. i'\rho' + B . \cos. i\rho . \sin. i'\rho' + C . \sin. i\rho . \cos. i'\rho' + D . \sin. i\rho . \sin. i'\rho';$$

i et i' étant des nombres entiers positifs ou zéro, et A, B, C, D, des fonctions inconnues des élémens elliptiques des deux planètes. Or la valeur de chacun de ces quatre coëfficiens pourra toujours s'exprimer au moyen d'une intégrale double. Pour déterminer A, par exemple, on aura

$$\pi^2 A = \iint \Omega \cos. i\rho . \cos. i'\rho' . d\rho\, d\rho';$$

π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, et les intégrales

enfin G et f étant des fonctions de ces constantes qui ne renferment pas le temps explicitement.

Pour abréger, nous désignerons par Ω' la quantité $\frac{d\Omega}{d\varepsilon}$; elle se déduira de Ω, en différenciant par rapport à ρ, à cause que $\frac{d\Omega}{d\varepsilon}=\frac{\Omega}{d\rho}$; par conséquent le terme de son développement, qui répond au précédent, sera

$$\Omega' = - i G. \sin. (i\rho + gt + f).$$

(24) Reprenons maintenant les expressions de $d'\rho$ et dh, savoir :

$$d'\rho = H\Omega' dt', \quad dh = n\Omega' dt;$$

et examinons les termes du second ordre de cette valeur de $d'\rho$. Pour les obtenir, il suffira de conserver ceux du premier ordre, dans les variations de la quantité h que contient le facteur H, et dans celles de ρ et des constantes arbitraires, renfermées dans Ω'. Cette quantité h se changera donc en une constante absolue, augmentée de $n\int\Omega' dt$; en même temps, ρ se changera dans le moyen mouvement

étant prises depuis $\rho=0$ et $\rho'=0$, jusqu'à $\rho=2\pi$ et $\rho'=2\pi$: et, en effet, il est aisé de voir que cette double intégration fera disparaître tous les termes du développement de Ω, excepté celui dont A est le coëfficient. Si i ou i' est nul, il faudra sous-doubler la valeur de A, et si l'on a à-la-fois $i=0$ et $i'=0$, il faudra diviser cette valeur par quatre. Peut-être pourrait-on, par quelqu'artifice de calcul, réduire ces intégrales doubles à des intégrales simples; mais même en conservant les intégrales doubles, on aura toujours l'avantage de pouvoir, par leur moyen, assigner une limite des coëfficiens de l'inégalité qui dépend d'un argument déterminé; mais ce n'est point ici le lieu d'insister davantage sur ces considérations.

elliptique nt, augmenté de $H\iint \Omega' dt^2$; et la partie de $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, correspondante à ces accroissemens de h et de ρ, sera

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = n\frac{dH}{dh}\,\Omega'\int \Omega'\,dt + H^2\frac{d\Omega'}{d\rho}\iint \Omega'\,dt^2;$$

expression dans laquelle on fera $\rho = nt$, et l'on regardera les constantes arbitraires, comme des constantes absolues.

On déduira alors du terme précédent de Ω' :

$$\Omega' = -iG.\,sin.\,(int + gt + f),$$
$$\frac{d\Omega'}{d\rho} = -i^2 G.\,cos.\,(int + gt + f),$$
$$\int \Omega'\,dt = \frac{iG}{in+g}.\,cos.\,(int + gt + f),$$
$$\iint \Omega'\,dt^2 = \frac{iG}{(in+g)^2}.\,sin.\,(int + gt + f).$$

Il est permis de supposer réduits à un seul, tous les termes du développement de Ω' qui renferment le même multiple de nt et le même arc gt; d'ailleurs, pour obtenir un terme non-périodique dans la valeur de $d^2\rho$, il faut combiner ensemble les termes qui dépendent des mêmes arcs int et gt, afin qu'ils s'y détruisent, s'il est possible : or on a, de cette manière,

$$\Omega'\int \Omega'\,dt = \frac{-i^2G^2}{2(in+g)}.\,sin.\,(2int + 2gt + 2f),$$
$$\frac{d\Omega'}{d\rho}\iint \Omega'\,dt^2 = \frac{-i^3G^2}{2(in+g)^2}.\,sin.\,(2int + 2gt + 2f);$$

ce qui ne donne, comme on voit, dans la valeur de $d^2\rho$, que des termes périodiques dépendans du double de l'angle

$int + gt$. A la vérité, ces termes ne dépendraient pas du temps, si l'on avait $i = o$, $g = o$; mais alors ils disparaîtraient, à cause que leurs coëfficiens seraient nuls.

Si l'on considérait le terme de Ω', qui dépend de l'angle $i'nt + g't$, i' étant un nombre entier, et la partie $g't$ venant des planètes perturbatrices, on pourrait croire qu'en le combinant avec celui qui dépend de $int + gt$, il suffirait qu'on eût $in + g = i'n' + g'$, pour qu'il en résultât des termes non-périodiques; mais il faut observer que g et g' ne contenant, par hypothèse, aucun multiple de n, cette équation ne peut avoir lieu sans qu'on ait séparément $i = i'$ et $g = g'$. La même remarque s'applique également aux démonstrations suivantes.

(25) Examinons de même les termes de la valeur de $d^2\rho$, dus aux variations des élémens de la planète troublée, ou aux constantes arbitraires qui les remplacent, et que nous représenterons généralement par a, b, c, etc. Lorsqu'elles deviendront variables, chacune d'elles se changera en une constante absolue, augmentée d'un terme qui sera de l'ordre des forces perturbatrices : nous indiquerons cet accroissement par la caractéristique δ; de sorte que, par exemple, a deviendra $a + \delta a$. En négligeant les termes du troisième ordre, la partie de $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, correspondante à ces accroissemens, sera

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \mathrm{H}\left(\frac{d\Omega'}{da}\delta a + \frac{d\Omega'}{db}\delta b + \frac{d\Omega'}{dc}\delta c + \text{etc.}\right);$$

on devra négliger ceux du second ordre dans les valeurs de δa, δb, δc, etc. ; par conséquent elles s'obtiendront en intégrant les différentielles du n° 11, et en y considérant

a, b, c, etc., comme des constantes absolues; il y faudra aussi remplacer les quantités (a), (b), (c), etc., par les différences partielles de Ω, relatives à a, b, c, etc. (nº 20): nous aurons alors

$$\delta a = [a, b]\int\frac{d\Omega}{db}dt + [a, c]\int\frac{d\Omega}{dc}dt + \text{etc.},$$

$$\delta b = [b, a]\int\frac{d\Omega}{da}dt + [b, c]\int\frac{d\Omega}{dc}dt + \text{etc.},$$

$$\delta c = [c, a]\int\frac{d\Omega}{da}dt + [c, b]\int\frac{d\Omega}{db}dt + \text{etc.},$$

etc.

En observant que $[b, a] = -[a, b]$, et de même pour les autres coëfficiens, on en conclura

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \text{H}\,[a, b]\left(\frac{d\Omega'}{da}\int\frac{d\Omega}{db}dt - \frac{d\Omega'}{db}\int\frac{d\Omega}{da}dt\right)$$
$$+ \text{H}\,[a, c]\left(\frac{d\Omega'}{da}\int\frac{d\Omega}{dc}dt - \frac{d\Omega'}{dc}\int\frac{d\Omega}{da}dt\right)$$
$$+ \text{H}\,[b, c]\left(\frac{d\Omega'}{db}\int\frac{d\Omega}{dc}dt - \frac{d\Omega'}{dc}\int\frac{d\Omega}{db}dt\right)$$
$$+ \text{etc.}:$$

or nous pouvons démontrer qu'une semblable expression ne contient aucun terme non-périodique.

En effet les développemens des différences partielles de Ω étant supposés de même forme que celui de cette fonction, nous pouvons représenter les termes de $\frac{d\Omega}{da}$ et $\frac{d\Omega}{db}$, par exemple, qui dépendent du même multiple i de nt, et du même arc gt, dû aux coordonnées des planètes perturbatrices, par

$$\frac{d\Omega}{da} = \text{G}.\,cos.\,(int + gt + f),$$

$$\frac{d\Omega}{db} = \text{G}'.\,cos.\,(int + gt + f');$$

G, G′, f, f', étant, ainsi que g, des quantités constantes. Nous en déduirons

$$\frac{d\Omega'}{da} = -i\text{G}.\,sin.\,(int + gt + f),$$

$$\int \frac{d\Omega}{da} dt = \frac{i\text{G}}{in+g} \cdot sin.\,(int + gt + f),$$

$$\frac{d\Omega'}{db} = -i\text{G}'.\,sin.\,(int + gt + f'),$$

$$\int \frac{d\Omega}{db} dt = \frac{i\text{G}'}{in+g} \cdot sin.\,(int + gt + f');$$

ce qui donne, en combinant ces termes ensemble, afin d'avoir, s'il est possible, des termes non périodiques,

$$\frac{d\Omega'}{da} \int \frac{d\Omega}{db} dt - \frac{d\Omega'}{db} \int \frac{d\Omega}{da} dt = o;$$

et de même pour les autres parties de la valeur précédente de $\frac{d^2\rho}{dt^2}$. Il en résulte donc, ainsi qu'on voulait le prouver, que cette valeur ne renferme, non plus que celle du numéro précédent, aucun terme qui ne contienne pas le temps explicitement.

(26) Les conclusions de ces deux numéros sont encore vraies, lorsqu'on pousse l'approximation jusqu'aux quantités du troisième ordre inclusivement; c'est-à-dire qu'alors les variations du facteur H, de la quantité ρ, et des élémens elliptiques de la planète troublée, ou des constantes qui les

remplacent, ne peuvent donner lieu à aucun terme non-périodique dans la valeur de $d^2\rho$. Pour le prouver, nous considérerons d'abord la variation de H. La quantité h se changeant en une constante absolue, augmentée de $\int n\Omega' dt$, la fonction H deviendra,

$$H = H_0 + H_1 \int n\Omega' dt + H_2 \left(\int n\Omega' dt\right)^2 + \text{etc.};$$

H_0, H_1, H_2, etc., étant des coëfficiens constans. En rejetant donc les termes d'un ordre supérieur au troisième, nous aurons

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = H_0\Omega' + H_1\Omega' \int n\Omega' dt + H_2 n^2 \Omega' \left(\int \Omega' dt^2\right)^2;$$

d'ailleurs n étant aussi une fonction de h, si nous représentons par N_0, N_1, N_2, etc., d'autres coëfficiens constans, nous aurons de même

$$\frac{1}{n} = N_0 + N_1 \int n\Omega' dt + \text{etc.};$$

multipliant donc le second terme de l'équation précédente, par n et par ce développement de $\frac{1}{n}$, cette équation deviendra

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = H_0\Omega' + H_1 N_0 \left(n\Omega' \int n\Omega' dt\right) + \left(H_2 n^2 + H_1 N_1 n\right) \Omega' \left(\int \Omega' dt^2\right)^2;$$

et, relativement à la quantité Ω' qu'elle renferme, on y devra conserver les termes du troisième ordre, dans la partie multipliée par H_0; ceux du second, dans celle qui a pour facteur $H_1 N_0$, et ceux du premier seulement, dans la troisième partie.

Or, en ayant égard aux quantités du premier et du second ordre, il vient d'être prouvé que Ω' multiplié par une fonction quelconque de h, et par conséquent $n\Omega'$, ne renferme pas de termes non-périodiques; si donc nous supposons la valeur de cette quantité, calculée à ce degré d'approximation, nous pourrons représenter un terme quelconque de son développement par

$$n\,\Omega' = \text{G}.\,sin.\,(int + gt + f);$$

expression dans laquelle i est un nombre entier ou zéro; n, G, g, f, sont des constantes absolues, et i et g ne peuvent être nuls en même temps. On en déduit

$$\int n\,\Omega'\,dt = -\frac{\text{G}}{in+g}.\,cos.\,(int. + gt + f);$$

multipliant ces deux termes l'un par l'autre, afin d'avoir, s'il est possible, un terme non-périodique, il vient, au contraire, un terme dépendant de l'angle $2int + 2gt$; ce qui prouve déja que la seconde partie de $d^2\rho$ que nous examinons, ne renferme aucun terme non-périodique.

Quant à la troisième partie, on a

$$\Omega'\left(\int \Omega'\,dt\right)^2 = \frac{d.\left(\int \Omega'\,dt\right)^3}{3\,dt};$$

et comme les constantes arbitraires doivent y être regardées comme des constantes absolues, il est évident que la différentiation par rapport à t fera disparaître les termes non-périodiques que pourra renfermer le développement du cube de $\int \Omega'\,dt$.

En faisant donc abstraction des termes périodiques, notre valeur de $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ se réduira à

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}=\mathrm{H}_0\,\Omega'.$$

(27) Nous désignerons toujours par la caractéristique δ, l'accroissement de chacune des constantes arbitraires a, b, c, etc., contenues dans Ω'; nous représenterons de même par $nt+\delta\rho$, ce que devient la quantité ρ, renfermée dans cette même fonction; nous aurons alors, en ne considérant que les termes du troisième ordre,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{dt^2}=\mathrm{H}_0\Big[&\frac{d\Omega'}{d\rho}\delta\rho+\frac{d\Omega'}{da}\delta a+\frac{d\Omega'}{db}\delta b+\text{etc.}\\ &+\tfrac{1}{2}\frac{d^2\Omega'}{d\rho^2}\delta\rho^2+\frac{d^2\Omega'}{d\rho\,da}\delta\rho\,\delta a+\frac{d^2\Omega'}{d\rho\,db}\delta\rho\,\delta b+\text{etc.}\\ &+\tfrac{1}{2}\frac{d^2\Omega'}{da^2}\delta a^2+\frac{d^2\Omega'}{da\,db}\delta a\,\delta b+\text{etc.}\\ &+\text{etc.}\Big].\end{aligned}$$

Dans les différences partielles de Ω' que cette formule renferme, on devra regarder a, b, c, etc., comme des constantes absolues, et faire $\rho=nt$. De plus, on devra substituer la partie du second ordre des valeurs de $\delta\rho$, δa, δb, etc., dans les termes du premier degré par rapport à ces variations, et seulement la partie du premier ordre, dans les termes du second degré. Mais maintenant le choix des constantes arbitraires n'est plus indifférent, comme il l'était dans le n° 25 : pour n'avoir pas à considérer les variations des coëfficiens $[a, b]$, $[a, c]$, etc., nous prendrons le systême de constantes du n° 12; c'est-à-dire que nos six constantes arbitraires seront les valeurs initiales des

trois coordonnées de la planète troublée, que nous représenterons par a, b, c, et celles de leurs différentielles premières, divisées par dt, que nous désignerons par a', b', c'. Dans cette hypothèse, nous aurons

$$da = -\frac{d\Omega}{da'}dt, \quad da' = \frac{d\Omega}{da}dt;$$

$$db = -\frac{d\Omega}{db'}dt, \quad db' = \frac{d\Omega}{da}dt;$$

$$dc = -\frac{d\Omega}{dc'}dt, \quad dc' = \frac{d\Omega}{dc}dt.$$

Cela posé, les termes du premier ordre des valeurs de $\delta\rho$, δa, $\delta a'$, δb, etc., seront

$$\delta\rho = \mathrm{H}_0 \iint \Omega' dt^2, \quad \delta a = -\int \frac{d\Omega}{da'}dt, \quad \delta a' = \int \frac{d\Omega}{da}dt, \text{ etc.};$$

et pour les termes du second ordre, en observant que

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 + n\mathrm{H}_1 \int \Omega' dt + \text{etc.}, \quad \frac{d\Omega}{d\rho} = \Omega',$$

et, faisant de même

$$\frac{d\Omega'}{d\rho} = \Omega'', \quad \frac{d\Omega''}{d\rho} = \Omega''',$$

on trouvera facilement

$$\delta\rho = n\mathrm{H}_1 \iint \left(\Omega' dt^2 \int \Omega' dt\right) + \mathrm{H}_0^2 \iint \left(\Omega'' dt^2 \iint \Omega' dt^2\right)$$

$$+ \mathrm{H}_0 \iint \left[\frac{d\Omega'}{da'}\int\frac{d\Omega}{da}dt - \frac{d\Omega'}{da}\int\frac{d\Omega}{da'}dt + \frac{d\Omega'}{db'}\int\frac{d\Omega}{db}dt\right.$$

$$\left. - \frac{d\Omega'}{db}\int\frac{d\Omega}{db'}dt + \frac{d\Omega'}{dc'}\int\frac{d\Omega}{dc}dt - \frac{d\Omega'}{dc}\int\frac{d\Omega}{dc'}dt\right] dt^2,$$

$$\delta a = -\mathrm{H}_0 \int \left(\frac{d\Omega'}{da'} dt \iint \Omega' dt^2 \right)$$

$$-\mathrm{H}_0 \int \left[\frac{d^2\Omega}{da'^2} \int \frac{d\Omega}{da} dt - \frac{d^2\Omega}{da'\,da} \int \frac{d\Omega}{da'} dt + \frac{d^2\Omega}{da'\,db'} \int \frac{d\Omega}{db} dt \right.$$

$$\left. - \frac{d^2\Omega}{da'\,db} \int \frac{d\Omega}{db'} dt + \frac{d^2\Omega}{da'\,dc'} \int \frac{d\Omega}{dc} dt - \frac{d^2\Omega}{da'\,dc} \int \frac{d\Omega}{dc'} dt \right] dt,$$

$$\delta a' = \mathrm{H}_0 \int \left(\frac{d\Omega'}{da} dt \iint \Omega' dt^2 \right)$$

$$-\mathrm{H}_0 \int \left[\frac{d^2\Omega}{da^2} \int \frac{d\Omega}{da'} dt - \frac{d^2\Omega}{da\,da'} \int \frac{d\Omega}{da} dt + \frac{d^2\Omega}{da\,db} \int \frac{d\Omega}{db'} dt \right.$$

$$\left. - \frac{d^2\Omega}{da\,db'} \int \frac{d\Omega}{db} dt + \frac{d^2\Omega}{da\,dc} \int \frac{d\Omega}{dc'} dt - \frac{d^2\Omega}{da\,dc'} \int \frac{d\Omega}{dc} dt \right] dt:$$

nous n'écrivons pas les valeurs de δb, $\delta b'$, δc, $\delta c'$, qui se déduisent de celles de δa, $\delta a'$, par de simples changemens de lettres.

Dans tous ces termes du premier et du second ordre, il faudra faire $\rho = nt$, et considérer a, a', b, etc., comme des constantes absolues. En les substituant, ainsi qu'il vient d'être dit, dans la valeur de $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, on trouve

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = n\mathrm{H}_0\mathrm{H}_1\Omega'' \iint \left(\Omega' dt^2 \int \Omega' dt \right)$$

$$+ \mathrm{H}_0^3 \left[\Omega'' \iint \left(\Omega'' dt^2 \iint \Omega' dt^2 \right) + \tfrac{1}{2} \Omega''' \left(\iint \Omega' dt^2 \right)^2 \right]$$

$$+ \mathrm{H}_0^2 \Big([da', da] - [da, da'] + [db', db] - [db, db'] + [dc', dc]$$

$$- [dc, dc'] \Big)$$

$$-H_0\Big[(da\,da',da,da')-(da\,db,db',da')+(da\,db',db,da')-(da\,dc,dc',da')$$
$$+(da\,dc',dc,da')-(da'\,db',db,da)+(da'\,db,db',da)-(da'\,dc',dc,da)$$
$$+(da'\,dc,dc',da)+(db\,db',db,db')-(db\,dc,dc',db')+(db\,dc',dc,db')$$
$$-(db'\,dc',dc,db)+(db'\,dc,dc',db)+(dc\,dc',dc,dc')\Big]$$

$$+H_0\Big[(da^2,da')+(da'^2,da)+(db^2,db')+(db'^2,db)+(dc^2,dc')$$
$$+(dc'^2,dc)\Big];$$

en faisant, pour abréger,

$$[da',da]=\Omega''\iint\left(\frac{d\Omega'}{da'}dt^2\int\frac{d\Omega}{da}dt\right)$$
$$-\frac{d\Omega'}{da}\cdot\int\left(\frac{d\Omega'}{da'}dt\iint\Omega'\,dt^2\right)+\frac{d\Omega''}{da'}\cdot\int\frac{d\Omega}{da}dt\cdot\iint\Omega'\,dt^2,$$

$$(da\,da',da,da')=\frac{d^2\Omega'}{da\,da'}\cdot\int\frac{d\Omega}{da}dt\cdot\int\frac{d\Omega}{da'}dt$$
$$-\frac{d\Omega'}{da}\cdot\int\left(\frac{d^2\Omega}{da\,da'}dt\int\frac{d\Omega}{da'}dt\right)-\frac{d\Omega'}{da'}\cdot\int\left(\frac{d^2\Omega}{da\,da'}dt\int\frac{d\Omega}{da}dt\right),$$

$$(da^2,da')=\tfrac{1}{2}\,\frac{d^2\Omega'}{da^2}\cdot\left(\int\frac{d\Omega}{da'}dt\right)^2-\frac{d\Omega'}{da'}\int\left(\frac{d^2\Omega}{a'}dt\int\frac{d\Omega}{da'}dt\right);$$

les autres quantités se déduisent de celles-ci par des permutations entre les différentielles de a, a', b, etc., qui indiquent des différences partielles relatives aux constantes. Ainsi, par exemple, $(db'\ dc',\ dc,\ db)$ se déduit de $(da\ da',\ da,\ da')$, en y changeant les différentielles secondes, prises par rapport à a, a', en différentielles relatives à b', c'; les différentielles premières relatives à a, en différentielles relatives à c, et celles qui se rapportent à a', en différentielles relatives à b. La notation (da^2, da') indique une quantité qui renferme des différentielles secondes par rapport à a, et des différentielles premières relatives à a'; on en déduira

(db'^2, db), par exemple, en y changeant les dernières en différentielles relatives à b, et les autres en différentielles secondes par rapport à b'. La notation $[da, da']$ représente une quantité qui ne contient que des différentielles premières, les unes relatives à a et les autres à a'; et de même pour les analogues $[da', da]$, $[db, db']$, etc.

(28) Les diverses quantités qui entrent dans la valeur de $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, y compris celles qui ont pour facteur n H_0 H_1 ou H_0^2, ne présentent au plus que cinq formes différentes, auxquelles on peut les ramener de la manière suivante. Désignons par P, Q, R, des fonctions semblables à Ω, c'est-à-dire des fonctions qui puissent se développer en séries convergentes de sinus ou de cosinus d'arcs multiples de nt et d'autres arcs proportionnels au temps; convenons d'indiquer, comme plus haut, par des accents supérieurs, les différences partielles relatives à ρ ou à nt; de sorte qu'on ait

$$\frac{dP}{d.nt}=P', \quad \frac{dP'}{d.nt}=P'', \text{ etc.};$$

et de même pour Q et R : les formes de quantités dont nous voulons parler, sont celles-ci :

$$\frac{dP'}{dt}\cdot\int P^2\,dt,$$

$$\frac{d^2P'}{dt^2}\cdot\iint\left(\frac{d^2P'}{dt^2}\cdot P\,dt^2\right)+\frac{1}{2}\,\frac{d^2P''}{dt^2}\cdot P^2,$$

$$\frac{d^2P'}{dt^2}\cdot\iint QR\,dt^2-\frac{dR'}{dt}\cdot\int QP\,dt+PRQ',$$

$$PQR'-\frac{dP'}{dt}\cdot\int QR\,dt-\frac{dQ'}{dt}\cdot\int PR\,dt,$$

$$\frac{1}{2}P^2R'-\frac{dP'}{dt}\cdot\int PR\,dt.$$

La partie de $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, qui a $n\,H_0\,H_1$ pour facteur, se ramène à la première forme, en observant que

$$\Omega'' \iint \left(\Omega'\,dt^2 \int \Omega'\,dt\right) = \tfrac{1}{2}\,\Omega'' \int \left(\int \Omega'\,dt\right)^2 dt,$$

et prenant $\int \Omega'\,dt = P$, d'où il résulte $\Omega'' = \frac{dP'}{dt}$. Le terme multiplié par H_0^3 coïncide immédiatement avec la seconde forme, en prenant $\iint \Omega'\,dt^2 = P$; ce qui donne $\Omega'' = \frac{d^2P'}{dt^2}$, $\Omega''' = \frac{d^2P''}{dt^2}$. La troisième comprend la quantité $[da', da]$, en faisant

$$\iint \Omega'\,dt^2 = P,\ \frac{d\Omega'}{da'} = Q,\ \int \frac{d\Omega}{da}\,dt = R;$$

d'où il résulte

$$\Omega'' = \frac{d^2P'}{dt^2},\quad \frac{d\Omega''}{da'} = Q',\quad \frac{d\Omega'}{da} = \frac{dR'}{dt};$$

et de même pour les quantités semblables à $[da', da]$. On vérifiera, sans plus de difficulté, que la quatrième et la cinquième formes comprennent les quantités $(da\,da', da, da')$, (da^2, da'), et leurs analogues.

Ce qui nous reste à faire consiste donc à démontrer que chacune de nos cinq formes de quantités ne contient aucun terme non-périodique. On peut observer que la cinquième n'étant pas distincte de la quatrième, dont elle se déduit en faisant $Q = P$, et divisant par deux, ces cinq formes se réduisent à quatre, que nous allons examiner successivement.

(29) Dans cet examen, nous supposerons réduits à un seul tous les termes du développement de chacune des fonctions P, Q, R, qui dépendent du même multiple de nt, et, en outre, du même arc proportionnel au temps; G, g, f, et les mêmes lettres accentuées désigneront des constantes; i, i', i'', des nombres entiers positifs, négatifs, ou nuls; enfin nous ferons, pour abréger,

$$(i+i'+i'')\,nt+(g+g'+g'')\,t+f+f'+f''=u.$$

Cela étant,

1° Considérons trois termes quelconques du développement de P, et soit

$$P=G.\cos.(int+gt+f)+G'\cos.(i'nt+g't+f') + G''.\cos.(i''nt+g''t+f'');$$

nous aurons en même temps

$$\frac{dP'}{dt}=-iG(in+g).\cos.(int+gt+f) -i'G'(i'n+g').\cos.(i'nt+g't+f') -i''G''(i''n+g'').\cos.(i''nt+g''t+f'').$$

Substituant ces valeurs dans notre première forme des quantités, et réunissant tous les termes qui renferment $\sin.u$, on trouve

$$\frac{dP'}{dt}\int P' dt=-\frac{GG'G''\sin.u}{2}\cdot\left[\frac{i(in+g)}{(i'+i'')n+g'+g''} + \frac{i'(i'n+g')}{(i+i'')n+g+g''}+\frac{i''(i''n+g'')}{(i+i')n+g+g'}\right].$$

Pour que le temps disparaisse dans ce terme, il faut qu'on

ait $(i+i'+i'')\,n+g+g'+g''=0$, équation qui se décompose en $i+i'+i''=0$, et $g+g'+g''=0$, à cause que les quantités g, g', g'' ne sont censées contenir aucun multiple de n. Le facteur compris entre les crochets se réduit alors à $-i-i'-i''=0$, ce qui fait disparaître le terme supposé non-périodique. Ceci convient également aux autres parties de la valeur de notre quantité ; car elles sont de la même forme que celle qui renferme *sin. u*, et elles s'en déduisent en y changeant les signes de i, i', i'', et des autres constantes, ou en établissant entre elles des rapports d'égalité. Nous pouvons donc conclure que la première forme à examiner ne renferme aucun terme non-périodique.

2° La valeur de P donne aussi

$$\begin{aligned}\frac{d^2P'}{dt^2} = {} & G\,i\,(in+g)^2.\ sin.\,(int+gt+f)\\ & +G'i'\,(i'n+g')^2.\ sin.\,(i'nt+g't+f')\\ & +G''i''\,(i''n+g'')^2.\ sin.\,(i''nt+g''t+f''),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2P''}{dt^2} = {} & G\,i^2\,(in+g)^2.\ cos.\,(int+gt+f)\\ & +G'i'^2\,(i'n+g')^2.\ cos.\,(i'nt+g't+f')\\ & +G''i''^2\,(i''n''+g'')^2.\ cos.\,(i''nt+g''t+f'').\end{aligned}$$

Je substitue ces expressions et la valeur de P dans la seconde forme de quantités ci-dessus, et réunissant tout ce qui dépend de *cos. u*, je trouve ce terme qu'il suffira de considérer :

$$\frac{GG'G''\cos.u}{4}\cdot\Big[\frac{i(in+g)^2\big(i'(i'n+g')^2+i''(i''n+g'')^2\big)}{((i'+i'')n+g'+g'')^2}+i^2(in+g)^2$$
$$+\frac{i'(i'n+g')^2\big(i(in+g)^2+i''(i''n+g'')^2\big)}{((i+i'')n+g+g'')^2}+i'^2(i'n+g')^2$$
$$+\frac{i''(i''n+g'')^2\big(i(in+g)^2+i'(i'n+g')^2\big)}{((i+i')n+g+g')^2}+i''^2(i''n+g'')^2\Big].$$

En y supposant $i+i'+i''=0$, $g+g'+g''=0$, afin d'avoir un terme non-périodique, le facteur compris entre les crochets se change en

$$\big(i(in+g)^2+i(in+g)^2+i'(i'n+g'')^2\big)(i+i'+i'')=0;$$

d'où l'on conclut qu'il n'y a pas non plus de termes de cette espèce, dans la seconde forme de quantités.

3°. Considérons un terme quelconque du développement de chacune des fonctions P, Q, R, et soit

$$P=G.\cos.(int+gt+f),$$
$$Q=G'\cos.(i'nt+g't+f'),$$
$$R=G''.\cos.(i''nt+g''t+f'');$$

en les substituant dans la troisième forme ci-dessus, et ne conservant que la partie qui contient *sin. u.* et qui peut représenter toutes les autres, on a ce terme :

$$-\frac{GG'G''.\sin.u}{4}\cdot\Big[\frac{i(in+g)^2}{((i'+i'')n+g'+g'')^2}-\frac{i''(i''n+g'')}{(i+i')n+g+g'}+i'\Big],$$

qui devient nul quand on y suppose $i+i'+i''=0$, $g+g'+g''=0$, à cause que le facteur compris entre les crochets se change alors en $i+i'+i''=0$.

4° Enfin substituons ces mêmes valeurs de P, Q, R, dans la quatrième forme de quantités à examiner; en réunissant toujours tout ce qui renferme *sin. u*, on obtient ce terme:

$$-\frac{GG'G''.\sin.u}{4}\cdot\left[\frac{i(in+g)}{(i'+i'')n+g'+g''}+\frac{i'(i'n+g')}{(i+i'')n+g+g''}-i''\right];$$

quantité nulle dans l'hypothèse de $i+i'+i''=0$, et $g+g'+g''=0$; par conséquent, la troisième et la quatrième forme, non plus que la première et la seconde, ne contiennent aucun terme périodique.

(30) Il est donc démontré maintenant, que les variations des élémens elliptiques de la planète troublée, n'introduisent aucun terme non-périodique dans la différentielle seconde de son moyen mouvement, lors même que l'on pousse l'approximation jusqu'aux quantités du troisième ordre par rapport aux forces perturbatrices. La démonstration précédente deviendrait beaucoup trop compliquée, et ne saurait s'étendre aux ordres supérieurs; mais l'induction ne permet guère de douter qu'une proposition démontrée généralement pour le premier, le second et le troisième ordre, ne soit rigoureusement vraie. L'invariabilité des moyens mouvemens n'en est pas une conséquence nécessaire; car, dans tout ceci, nous n'avons pas eu égard aux variations des élémens des planètes perturbatrices, lesquelles produisent, dans la fonction Ω, des termes qui se présentent dès le second ordre. Les différentielles de ces élémens s'expriment au moyen des différences partielles d'une fonction qui n'est pas la même que Ω; ce qui empêche que l'on puisse appliquer aux termes de la valeur de $d^2\rho$, résultans de leurs

variations, la même analyse qu'à ceux qui sont dûs aux variations des élémens de la planète troublée. Dans mon Mémoire *sur les inégalités séculaires des moyens mouvemens des planètes* (*), j'ai eu recours au principe des forces vives pour prouver que cette valeur ne contient aucun terme non-périodique du second ordre, dû à la cause dont nous parlons; M. Lagrange et M. Laplace ont démontré depuis la même proposition, chacun d'une manière différente; mais aucune de ces démonstrations ne s'étend au troisième ordre, et c'est encore une question indécise de savoir, si, passé le second ordre, la valeur de $d'\rho$ renferme des termes non-périodiques. Au reste, il n'est pas question ici des variations des élémens des planètes perturbatrices, produites par leur action réciproque, mais seulement de celles qui sont dues à la réaction de la planète troublée : les termes des premières ne contenant pas le moyen mouvement nt de cette planète, ne peuvent détruire les multiples de nt que contiennent les termes du développement de Ω; et par conséquent il n'en peut résulter dans Ω' aucun terme indépendant de ce moyen mouvement. Si donc la valeur de $d'\rho$ renferme des termes non-périodiques d'un ordre supérieur au second, ils sont nécessairement dus à la réaction de la planète troublée, et comme tels, ils auront pour facteur, au moins la première puissance de sa masse.

Au lieu du mouvement d'une planète, supposons qu'il s'agisse de celui d'un satellite; par exemple, du mouvement de la lune autour de la terre, troublé par l'action du soleil

(*) Journal de l'École Polytechnique, 15[e] cahier, page 35.

et des planètes. Les termes dont il est question, qui auraient la masse de la lune pour facteur, ne seraient nullement à considérer ; on peut donc être certain que le moyen mouvement de la lune ne contient aucune inégalité sensible, dont l'argument soit indépendant de ce même moyen mouvement et de celui du soleil ; par conséquent, l'inégalité qui affecte la longitude moyenne, et dont la période paraît être d'environ cent quatre-vingts ans (*), n'est pas due à la partie de cette longitude que les géomètres appellent spécialement le moyen mouvement. Dans le mouvement troublé, la longitude moyenne est représentée par la somme des deux quantités que nous avons désignées plus haut (nos 21 et 23), par ρ et ε ; les inégalités lunaires à longues périodes, ne peuvent se trouver dans la valeur de ρ, et l'inégalité de cent quatre-vingts ans, comme l'équation séculaire, ne saurait résulter que de la variation de ε ; mais, d'un autre côté, les termes de ε augmentant, par l'intégration, dans un beaucoup moindre rapport que ceux de ρ, il paraît difficile que l'expression de ε renferme une inégalité à longue période, aussi considérable que celle qui résulte de l'observation (**) : c'est donc une raison de penser que cette inégalité, dont la cause est encore inconnue, n'est due ni à l'action du soleil, ni à l'action directe des planètes sur la lune.

(31) Dans le mouvement de rotation de la terre, la somme

(*) Mécanique céleste, tome III, page 289.

(**) Suivant les recherches les plus récentes, faites sur ce sujet par M. Burckardt, le *maximum* de cette inégalité doit s'élever à 40" centésimales.

des forces vives demeure une quantité constante, lorsqu'on fait abstraction des forces qui agissent sur le sphéroïde terrestre et qui proviennent principalement de l'action du soleil et de la lune. Elle devient variable en vertu de ces forces; mais son expression ne renferme que de très-petites inégalités périodiques, réglées sur le mouvement diurne, et elle ne contient aucune équation séculaire. Ce théorême est analogue à l'invariabilité de la quantité h (nº 21) dans la théorie des planètes; il se démontre de la même manière, quand on a seulement égard aux premières puissances des forces perturbatrices; mais si l'on veut considérer les termes des ordres supérieurs, sa démonstration diffère en un point essentiel de celle qui convient au mouvement des planètes; et l'on ne pourrait pas appliquer immédiatement à la somme des forces vives du mouvement de rotation, les raisonnemens dont nous venons de faire usage dans les numéros précédens. L'importance de cette question, d'où dépend la constance du jour sidéral, m'engage à en renvoyer l'examen à un autre Mémoire où je me propose de reprendre et de simplifier les recherches sur le mouvement de rotation de la terre qui se trouvent dans le 15ᵉ cahier du Journal de l'École Polytechnique.

MÉMOIRE

SUR LA THÉORIE DES ONDES;

PAR M. POISSON.

Lu le 2 octobre et le 18 décembre 1815.

Lorsqu'on agite l'eau en un endroit de sa surface, on voit aussitôt se former des *ondes* qui se propagent circulairement autour d'un centre commun, et qui sont dues aux élévations et aux abaissemens successifs du fluide, au-dessus et au-dessous de son niveau naturel. Ce phénomène est un des cas les plus simples du mouvement des fluides, et l'un des premiers qui se présente aux recherches des géomètres; cependant on n'est point encore parvenu à déterminer d'une manière satisfaisante, les lois de ces oscillations qu'on a si souvent l'occasion d'observer.

Newton, dans le livre des *Principes* (*), les compare aux oscillations de l'eau dans un syphon renversé; de cette comparaison, il conclut que la vitesse de la propagation des ondes doit être proportionnelle à la racine quarrée de leur largeur, et que chaque onde doit parcourir sa largeur entière dans un temps égal à celui des oscillations d'un pendule

(*) Livre second, propositions 44, 45 et 46.

simple qui aurait, pour longueur, le double de cette même largeur. On entend ici par *largeur* des ondes, l'intervalle compris entre les sommets de deux ondes consécutives, l'une saillante et l'autre tracée en creux à la surface du fluide; il resterait donc à déterminer cet intervalle, pour un ébranlement donné de la masse fluide, et à reconnaître s'il demeure constant ou s'il varie pendant la durée du mouvement; mais en y réfléchissant avec toute l'attention que le nom de Newton commande, on ne trouve pas une analogie suffisante entre ces deux mouvemens, dont ce grand physicien supposait l'identité; et son hypothèse ne paraît pas assez fondée, pour servir de base à une détermination exacte de la vîtesse des ondes.

M. Laplace est le premier qui ait cherché à soumettre cette question à une analyse régulière. Cet essai est imprimé à la suite des recherches sur les oscillations de la mer et de l'atmosphère, qui se trouvent dans le volume de l'Académie des sciences, pour l'année 1776. On y forme les équations différentielles du mouvement des fluides incompressibles et pesans, modifiées par la seule hypothèse que les vîtesses et les oscillations des molécules restent toujours assez petites pour qu'on puisse négliger leurs produits et leurs puissances supérieures à la première; supposition permise, et sans laquelle ce problème deviendroit si compliqué qu'on n'en pourrait espérer aucune solution. Celle que M. Laplace donne de ces équations différentielles, convient au cas où le fluide n'a reçu primitivement aucune vîtesse, et où il a été dérangé de son état d'équilibre, en faisant prendre à sa surface, dans toute son étendue, la forme d'une *throchoïde,* c'est-à-dire d'une courbe serpentante; dont l'ordonnée ver-

ticale est exprimée par le cosinus d'un arc proportionnel à l'abscisse horizontale; mais dans la théorie des ondes, le cas qu'on doit avoir en vue, est, au contraire, celui où la surface n'a été déformée que dans une petite étendue; et la solution dont nous parlons, ne saurait s'y appliquer, lors même que, dans cette étendue, la surface aurait reçu la figure d'une portion de trochoïde.

Environ dix ans après, Lagrange, dans les Mémoires de Berlin, et ensuite dans la mécanique analytique, traita directement le cas où la profondeur du fluide est supposée très-petite et constante. Il démontre qu'alors la propagation des ondes a lieu suivant les mêmes lois que celle du son; en sorte que leur vîtesse est constante et indépendante de l'ébranlement primitif; et de plus, il la trouve proportionnelle à la racine quarrée de la profondeur du fluide, lors qu'il est contenu dans un canal qui a la même largeur dans toute son étendue. Il suppose ensuite que le mouvement excité à la surface d'un fluide incompressible, d'une profondeur quelconque, ne se transmet qu'à de très-petites distances au-dessous de cette surface; d'où il conclut que son analyse donne encore la solution du problême, quelque grande que soit la profondeur du fluide que l'on considère; de manière que si l'observation faisait connaître la distance à laquelle le mouvement est insensible, la vîtesse de la propagation des ondes à la surface, serait proportionnelle à la racine quarrée de cette distance; et réciproquement, si cette vîtesse est mesurée directement, on en pourra déduire la petite profondeur à laquelle le mouvement parvient. Mais qu'il nous soit permis d'exposer ici quelques observations fort simples, qui prouvent que cette extension donnée à la

solution de Lagrange, ne peut pas être légitime, et que les choses ne se passent pas ainsi, lorsque l'on a égard à la transmission du mouvement dans le sens vertical.

En effet le mouvement dans ce sens n'est pas brusquement interrompu; les vîtesses et les oscillations des molécules diminuent à mesure que l'on s'enfonce au-dessous de la surface; et la distance à laquelle on peut les regarder comme insensibles, en admettant même, pour un moment, qu'elle soit très-petite, n'est pas une quantité déterminée qui puisse entrer, comme on le suppose, dans l'expression de la vîtesse à la surface. Pour fixer les idées, supposons la profondeur et les autres dimensions du fluide, infinies ou assez grandes pour qu'elles ne puissent avoir aucune influence sur les lois de son mouvement; supposons aussi que la masse entière n'a reçu primitivement aucune vîtesse, et que l'ébranlement a été produit de la manière suivante, qui est la plus facile à se représenter. On plonge dans l'eau, en l'enfonçant très-peu, un corps solide d'une forme connue; on donne au fluide le temps de revenir au repos, puis on retire subitement le corps plongé : il se produit, autour de l'endroit qu'il occupait, des ondes dont il s'agit de déterminer la propagation. Or, il est évident que la profondeur du fluide ayant disparu, les seules lignes qui soient comprises parmi les données de la question, sont les dimensions du corps plongé, et l'espace que parcoure un corps pesant dans un temps déterminé ; par conséquent l'espace parcouru par chaque onde à la surface de l'eau ne peut être qu'une fonction de ces deux sortes de lignes. Si donc la vîtesse des ondes est indépendante de l'ébranlement primitif, c'est-à-dire de la forme et des dimensions du corps plongé, il faudra, d'après

le principe de l'homogénéité des quantités, que l'espace qu'elles parcourent dans un temps quelconque, soit égal à l'espace parcouru dans le même temps par un corps pesant, multiplié par une quantité abstraite, indépendante de toute unité de ligne ou de temps; donc alors le mouvement des ondes sera semblable à celui des corps graves, avec une accélération qui sera un certain multiple, ou une certaine fraction de l'accélération de la pesanteur. Si, au contraire, le mouvement des ondes est uniforme, il faut, d'après le même principe de l'homogénéité, que leur vitesse dépende de l'ébranlement primitif; de manière que l'espace parcouru dans un temps donné, soit une moyenne proportionnelle entre deux lignes, savoir: la ligne décrite dans le même temps par un corps grave, et l'une des dimensions, ou plus généralement, une fonction linéaire des dimensions du corps plongé. Il pourrait encore arriver que le mouvement des ondes fût accéléré, et que l'accélération dépendît du rapport numérique qui existe entre ces dimensions : c'est au calcul à décider lequel de ces mouvemens doit avoir effectivement lieu; mais on voit, *à priori,* qu'ils sont l'un et l'autre également contraires au résultat de la mécanique analytique.

Telles étaient, à ma connaissance, les seules recherches théoriques, publiées sur le problême des ondes, lorsque l'Institut le proposa pour sujet du prix de 1816. Long-temps auparavant; je m'étais occupé de cette importante question; mais ce n'est que dans ces derniers temps que j'en ai obtenu une solution qui m'a complettement satisfait, sous le rapport de la rigueur, et sous celui de la simplicité. La première partie de mon Mémoire a été déposée au bureau de l'Institut avant qu'aucune pièce destinée au concours, y fut parvenue;

j'en ai fait lecture le 2 octobre 1815, époque de l'expiration du concours; elle contenait les formules générales en intégrales définies qui renferment implicitement la solution du problème, et, comme conséquence de ces formules, la théorie des ondes qui se propagent d'un mouvement uniformément accéléré. Au mois de décembre suivant, j'ai lu la deuxième partie, ou plutôt un second Mémoire sur le même sujet; celui-ci renfermait la théorie des ondes qui se propagent avec une vîtesse constante : elles sont, comme on le verra, beaucoup plus sensibles que les ondes accélérées, et, pour cette raison, beaucoup plus importantes à considérer. Enfin, depuis cette époque, j'ai tâché de perfectionner ces recherches, sur-tout sous le rapport de la propagation du mouvement dans le sens vertical.

M. Biot a fait autrefois des expériences sur le mouvement des ondes produites par l'immersion de différens solides de révolution, et même par des cônes et des cylindres. Il a reconnu que leur vîtesse ne dépend ni de la figure de ces corps, ni de la quantité dont ils sont enfoncés dans le fluide, mais qu'elle varie avec le rayon de leur section *à fleur d'eau;* ce qui est conforme à la théorie qu'on trouvera dans mon Mémoire, et suivant laquelle la vîtesse des ondes est proportionnelle à la racine quarrée de ce rayon. On y trouvera aussi l'application de cette théorie à quatre expériences dont M. Biot avait conservé la note: l'accord satisfaisant que l'on remarquera entre le calcul et l'observation, fournirait, s'il en était besoin, une vérification de l'analyse dont j'ai fait usage, et du résultat principal auquel j'ai été conduit.

Les oscillations verticales des molécules, qui produisent l'apparence des ondes qui se propagent à la surface du

fluide, diminuent de grandeur à mesure que l'on s'éloigne du lieu de l'ébranlement primitif : leur amplitude suit la raison inverse de la racine quarrée des distances à ce point, quand le fluide est contenu dans un canal d'une largeur constante ; elle suit la raison inverse de ces distances, lorsque le fluide est libre de toutes parts, et que les ondes se propagent circulairement autour d'un centre commun. Les espaces que parcourent les molécules de l'intérieur du fluide, situées au-dessous de l'ébranlement primitif, décroissent suivant une loi plus rapide : suivant la raison inverse de la profondeur ou de son quarré, selon que le fluide est contenu ou non dans un canal ; en sorte qu'à de très-grandes distances du lieu de l'ébranlement, le mouvement doit être plus sensible à la surface que dans l'intérieur de la masse fluide. Néanmoins cette loi de décroissement dans le sens de la profondeur, que j'ai conclue de mon analyse, n'est pas tellement rapide que le mouvement ne puisse encore se faire sentir à d'assez grandes profondeurs ; résultat qui suffirait pour détruire l'hypothèse de Lagrange, dont il a été question plus haut, lors même que nous n'aurions pas prouvé, *à priori*, que la solution qu'il a donnée du problême des ondes, ne saurait s'étendre au cas d'un fluide d'une profondeur quelconque.

Cette transmission du mouvement à de grandes profondeurs, a été remarquée, ce me semble pour la première fois, par l'ingénieur Brémontier, dans un ouvrage sur le *mouvement des ondes*, publié en 1809. A la vérité les raisonnemens qu'il emploie pour établir son opinion, sont loin d'être satisfaisans ; mais les faits qu'il cite ne permettent pas de douter que le mouvement produit à la surface de l'eau, ne

soit encore sensible à de grandes distances au-dessous de cette surface ; et l'on peut regarder ce résultat de l'analyse comme étant aussi confirmé par l'observation. Il serait à desirer que quelque habile observateur entreprît de vérifier, par de nouvelles expériences, tous les points de la théorie que je vais exposer dans ce Mémoire : l'accord que présenteraient, sans doute, le calcul et l'observation, ne serait pas sans intérêt pour les physiciens ; et les géomètres ne verraient pas non plus sans plaisir réaliser, pour ainsi dire, les diverses circonstances du mouvement des fluides qui sont contenues dans leurs formules.

Les intégrales relatives au problême des ondes, que l'on trouvera dans ce Mémoire, conviennent au cas où le fluide a une profondeur quelconque ; mais on s'est spécialement attaché à traiter le cas le plus ordinaire, celui où cette profondeur devient très-grande et comme infinie par rapport à l'étendue des oscillations des molécules. Dans un autre Mémoire, je me propose de considérer l'influence que peut avoir le plus ou moins de profondeur du fluide, sur les mouvemens de ses molécules, c'est-à-dire la réflexion du mouvement dans le sens vertical, due au fond sur lequel le fluide repose ; en même temps, j'essaierai de déterminer les lois de la réflexion des ondes à sa surface, produite par les parois latérales et fixes qui le contiennent.

§. Ier.

Équations différentielles du problème.

(1) La théorie des oscillations d'un fluide incompressible et homogène, soumis à l'action de la pesanteur et un tant soit peu écarté de son état d'équilibre, est comprise dans ces deux équations (*) :

$$\frac{p}{\rho} - gz + \frac{d\varphi}{dt} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0. \qquad (2)$$

La variable t représente le temps; g la pesanteur, et ρ la densité du fluide; $x, y, z,$ sont les trois coordonnées rectangulaires d'un point quelconque du fluide; x et y sont horizontales; z est verticale et comptée dans le sens de la pesanteur; enfin p et φ sont deux fonctions inconnues de x, y, z et t: la première représente la pression qui a lieu, au bout du temps t, au point dont les coordonnées sont x, y, z; les différences partielles de la seconde, relatives à $x, y, z,$ expriment, pour le même instant et pour le même point, les vîtesses du fluide suivant ces coordonnées, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{dz}{dt}.$$

Ces vîtesses, et les distances des molécules à leurs positions initiales, sont regardées comme très-petites pendant

(*) Voyez mon Traité de Mécanique, tome II, page 493.

toute la durée du mouvement; on en néglige, dans le calcul, les produits et les puissances supérieures à la première; d'où il résulte que dans les quantités $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, on devra considérer x, y, z, comme constantes et se rapportant à la position initiale de chaque molécule.

A la surface, la pression p est indépendante de x, y, z; pour plus de généralité, on peut supposer qu'elle soit une fonction quelconque de t, que nous représenterons par P; or, en remplaçant, dans les équations précédentes, p par $p+\text{P}$, et φ par $\varphi - \frac{1}{\rho}\int \text{P}\,dt$, la fonction P disparaît, et ces équations conservent identiquement la même forme; ce qui prouve que la pression à la surface n'a aucune influence sur le mouvement du fluide. De cette manière, p ne représentera plus que l'excès de la pression intérieure, sur la pression extérieure P; si donc on désigne par z', l'ordonnée verticale d'un point quelconque de la surface, on aura, à-la-fois, $z=z'$ et $p=0$; et l'équation de la surface fluide à un instant quelconque, déduite de l'équation (1), sera

$$gz' - \frac{d\varphi}{dt} = 0. \qquad (3)$$

(2) Pour fixer les idées, nous prendrons pour le plan des x, y, celui du niveau du fluide dans l'état d'équilibre, auquel cas z' sera une très-petite quantité, et par conséquent aussi la valeur de $\frac{d\varphi}{dt}$ qui se rapporte à la surface. On devra donc faire $z=0$, dans cette valeur, et regarder, dans l'équation (3), x et y comme constantes; de sorte qu'en la différenciant par rapport à t, on aura simplement

$$g\frac{dz'}{dt} - \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0.$$

Dans cette équation, dz' représente l'abaissement vertical de la surface pendant l'instant dt, à l'endroit qui répond aux coordonnées x et y; en supposant donc que, pendant la durée de cet instant, la même molécule fluide demeure à la surface, $\frac{dz'}{dt}$ sera la vîtesse verticale de cette molécule, ou la valeur de $\frac{d\varphi}{dz}$ qui répond à $z=0$; par conséquent l'équation précédente se changera en celle-ci :

$$g\frac{d\varphi}{dz} - \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0, \qquad (4)$$

qui n'aura lieu que pour la valeur particulière $z=0$.

Afin de ne pas compliquer la question, nous regarderons la profondeur du fluide comme constante : nous la représenterons par h, en sorte que le fluide soit terminé dans le sens vertical par un plan fixe et horizontal, correspondant à $z=h$. Si l'on suppose, comme pour les molécules situées à la surface extérieure, que celles qui touchent ce plan fixe y restent adjacentes pendant toute la durée du mouvement, il faudra que leur vîtesse verticale soit constamment nulle; on aura donc, quelque soit t,

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0, \qquad (5)$$

pour la valeur particulière $z=h$.

(3) Telles sont les diverses équations différentielles, relatives au problême que nous nous proposons de résoudre.

On voit que celles du numéro précédent, qui se rapportent à la surface et au fond du fluide, résultent de conditions que l'on a coutume de regarder comme nécessaires à la continuité de la masse fluide; continuité sans laquelle il serait impossible de soumettre son mouvement au calcul. Nous les admettrons, avec celles du nº 1er, comme bases de notre analyse; et la question qui va nous occuper consistera d'abord à satisfaire simultanément et de la manière la plus générale, aux équations (2), (4) et (5), et ensuite à remplir les conditions relatives à l'état initial du fluide.

Nous distinguerons deux cas que nous examinerons successivement : celui où l'on fait abstraction d'une dimension horizontale du fluide, et le cas où l'on a égard à ses trois dimensions. Dans le premier cas, le fluide est censé réduit à un plan; mais on peut aussi le supposer contenu dans un canal vertical d'une largeur quelconque, pourvu qu'elle soit constante dans toute la longueur du canal, et que les molécules fluides n'aient aucun mouvement dans le sens de cette largeur.

§. II.

Intégration des équations précédentes, dans le cas où l'on fait abstraction d'une dimension horizontale du fluide.

(4) En prenant le plan des x, z, parallèle au fluide, ou aux parois verticales du canal qui le renferme, la fonction φ sera indépendante de y, et l'équation (2) se réduira à

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0. \qquad (6)$$

Comme elle est linéaire et à coëfficiens constans, on y peut

satisfaire par une valeur de φ composée d'exponentielles, de sinus et cosinus, et, sous cette forme, la solution la plus générale est celle-ci :

$$\varphi = \Sigma\left(Ae^{-az} + A'e^{az}\right) cos.(ax + a');$$

e représentant la base des logarithmes dont le module est l'unité; A, A', a, a', étant des quantités indépendantes de x et z; et la caractéristique Σ indiquant une somme qui s'étend à toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires, de ces quatre quantités.

Différenciant cette valeur de φ par rapport à z, et faisant ensuite $z=h$, on aura, en vertu de l'équation (5),

$$\Sigma\left(Ae^{-ah} - A'e^{ah}\right) a.\, cos.(ax + a') = 0;$$

or, cette équation ayant lieu pour toutes les valeurs de x, elle doit subsister séparément pour chaque terme de la somme Σ; on aura donc généralement

$$Ae^{-ah} - A'e^{ah} = 0;$$

d'où l'on tire

$$A = Te^{ah}, \quad A' = Te^{-ah};$$

T étant une nouvelle indéterminée.

La valeur de φ devient alors

$$\varphi = \Sigma T\left(e^{a(h-z)} + e^{-a(h-z)}\right) cos.(ax + a');$$

les trois indéterminées T, a et a' qu'elle renferme, pourraient être regardées comme des fonctions de t; mais pour sa-

tisfaire à l'équation (4), quelle que soit la valeur de x, il est aisé de voir qu'il faut supposer a et a' constante, et T seule dépendante de t. Prenant, dans cette hypothèse, les valeurs de $\frac{d\varphi}{dz}$ et $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, et y faisant $z=0$, on aura, en vertu de cette équation (4),

$$\Sigma\left[g\,\mathrm{T}\,a\left(e^{-ah}-e^{ah}\right)-\frac{d^2\mathrm{T}}{dt^2}\left(e^{-ah}+e^{ah}\right)\right].\cos.(ax+a')=0;$$

et à cause qu'elle doit subsister pour toutes les valeurs de x, on en conclura

$$\frac{d^2\mathrm{T}}{dt^2}+c^2\,\mathrm{T}=0,$$

en faisant, pour abréger,

$$ga\left(e^{ah}-e^{-ah}\right)=c^2\left(e^{ah}+e^{-ah}\right). \qquad (7)$$

On tire de-là, en intégrant

$$\mathrm{T}=\mathrm{B}.\sin.\,ct+\mathrm{B}'.\cos.\,ct;$$

B et B' étant les deux constantes arbitraires. Substituant cette valeur de T, dans celle de φ, il vient

$$\left.\begin{aligned}\varphi=\Sigma\mathrm{B}\left(e^{a(h-z)}+e^{-a(h-z)}\right)\cos.(ax+a').\sin.\,ct,\\ +\Sigma\mathrm{B}'\left(e^{a(h-z)}+e^{-a(h-z)}\right)\cos.(ax+a').\cos.ct;\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

expression dans laquelle les sommes Σ s'étendent à toutes les valeurs possibles des constantes B, B', a et a'.

Nous pouvons regarder cette valeur de φ en série d'expo-

nentielles (*), comme la solution la plus générale des équations simultanées (4), (5) et (6) ; mais pour en pouvoir faire usage, lorsque la masse fluide n'a été primitivement ébranlée que dans une petite étendue, ainsi qu'il arrive dans la production des ondes, il est nécessaire d'y introduire des fonctions arbitraire sque l'on puisse supposer discontinues ; or, c'est à quoi nous allons parvenir au moyen d'un théorème général sur la transformation des fonctions, qui pourra encore être utile dans beaucoup d'autres occasions.

(5) Quelle que soit la fonction fx, continue ou discontinue, pourvu qu'elle ne devienne infinie pour aucune valeur réelle de x, on aura, pour toutes les valeurs réelles de cette variable,

$$fx = \frac{1}{\pi} \cdot \iint f\alpha . \cos.(ax - a\alpha) . e^{-ak} da\, d\alpha; \quad (9)$$

cette intégrale double étant prise depuis $\alpha = -\frac{1}{0}$ jusqu'à $\alpha = +\frac{1}{0}$, et depuis $a = 0$ jusqu'à $a = \frac{1}{0}$; π représentant le rapport de la circonférence au diamètre, et k, une quantité positive qu'on devra supposer infiniment petite ou nulle après l'intégration.

En effet, entre les limites $a = 0$ et $a = \frac{1}{0}$, on a

$$\int \cos.(ax - a\alpha) . e^{-ak} da = \frac{k}{k^2 + (x - \alpha)^2};$$

d'où il suit

(*) On peut voir, sur la généralité de ces sortes d'expressions, une note imprimée dans le bulletin de la Société Phylomatique, année 1817, page 180.

$$\iint f\alpha.\cos.(ax-a\alpha).e^{-ak}\,da\,d\alpha=\int\frac{kf\alpha.d\alpha}{k^2+(x-\alpha)^2}.$$

Or, $f\alpha$ ne devenant jamais infinie, il est évident que cette intégrale simple, sera infiniment petite en même temps que k, excepté dans l'étendue des valeurs de α qui diffèrent infiniment peu de x; il suffira donc d'intégrer depuis $\alpha=x-u$, jusqu'à $\alpha=x+u$, u étant une quantité positive et infiniment petite : entre ces limites, $f\alpha$ sera censée constante et égale à fx; par conséquent on aura

$$\int\frac{kf\alpha.d\alpha}{k^2+(x-\alpha)^2}=fx.\int\frac{k\,d\alpha}{k^2+(x-\alpha)^2}=fx.\text{arc}\left(\text{tang.}=\frac{\alpha-x}{k}\right);$$

intégrale qui devient, entre les limites qu'on vient d'assigner,

$$2fx.\text{arc}\left(\text{tang.}=\frac{u}{k}\right),$$

et qui est égale à πfx, lorsqu'on y fait $k=0$. Donc enfin, comme nous l'avons annoncé, l'intégrale double ci-dessus représente la valeur de fx, pour chaque valeur donnée de la variable x.

Si la fonction fx était discontinue, qu'elle n'ait de valeurs que pour celles de x qui sont comprises entre $x=-l$ et $x=+l$, et qu'elle fût nulle pour toute valeur de x, prise hors de ces limites, l'équation (9) subsisterait toujours; mais alors l'intégrale relative à α ne devrait être prise que depuis $\alpha=-l$, jusqu'à $\alpha=+l$. Il faut aussi observer que, dans ce cas, l'intégrale double ne représenterait que la moitié des valeurs de fx qui répondent aux termes extrêmes $x=-l$ et $x=+l$. C'est ce qu'il est aisé de voir en observant que

si l'on suppose, par exemple, $x=+l$, l'intégrale relative à α, que nous venons d'évaluer, n'aura de valeurs que depuis $\alpha=l-u$, jusqu'à $\alpha=l$, et qu'elle sera égale à $\frac{\pi}{2}fl$, au lieu de $\pi f l$, lorsqu'on y fera $k=0$.

On voit sans peine que notre théorême s'étend aux fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables; par exemple, pour deux variables x et y, on démontrera, par les considérations précédentes, que l'on a

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\iiiint f(\alpha,\beta).\cos.(ax-a\alpha).\cos.(by-b\beta).e^{-ka-k'b}\,da\,db\,d\alpha\,d\beta;$$

l'intégrale quadruple étant prise entre les limites $\alpha=-\frac{1}{0}$, $\alpha=+\frac{1}{0}$; $\beta=-\frac{1}{0}$, $\beta=+\frac{1}{0}$; $a=0, a=\frac{1}{0}$; $b=0$, $b=\frac{1}{0}$; la fonction $f(x,y)$ ne devenant infinie pour aucune valeur réelle de x ou de y; et k, k' étant des quantités positives qu'on devra faire égales à zéro après les intégrations.

(6) Maintenant, pour appliquer ce théorême à la valeur de φ donnée par l'équation (8), supposons que les valeurs de cette fonction et de $\frac{d\varphi}{dt}$, qui répondent à $z=0$ et $t=0$, soient connues, et représentons-les par

$$\varphi=\mathrm{F}x,\quad \frac{d\varphi}{dt}=fx.$$

Il s'agira de faire coïncider ces expressions avec celles qu'on déduit de l'équation (8) et de sa différentielle par rapport à t, en y faisant aussi $z=0$ et $t=0$: on a, de cette manière,

$$\varphi = \mathrm{F}x = \Sigma \mathrm{B}'\left(e^{ah} + e^{-ah}\right).\, cos.(ax + a'),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = fx = \Sigma \mathrm{B}c\left(e^{ah} + e^{-ah}\right).\, cos.(ax + a');$$

or, en comparant ces formules à l'équation (9), on voit qu'il faut prendre

$$a' = -a\alpha,$$

$$\mathrm{B}' = \frac{\mathrm{F}\alpha . e^{-ak} da\, d\alpha}{\pi\left(e^{ah} + e^{-ah}\right)},$$

$$\mathrm{B} = \frac{f\alpha . e^{-ak} da\, d\alpha}{\pi c\left(e^{ah} + e^{-ah}\right)},$$

et changer le signe Σ en une intégrale double relative à a et α. Au moyen de ces valeurs l'équation (8) deviendra

$$\varphi = \frac{1}{\pi} . \int\!\!\int f\alpha \left(\frac{e^{a(h-z)} + e^{-a(h-z)}}{e^{ah} + e^{-ah}}\right) . \, cos.(ax - a\alpha) . \frac{sin.\, ct}{c} . \, da\, d\alpha;$$

$$+ \frac{1}{\pi} . \int\!\!\int \mathrm{F}\alpha \left(\frac{e^{a(h-z)} + e^{-a(h-z)}}{e^{ah} + e^{-ah}}\right) . \, cos.\, (ax - a\alpha) . cos.\, ct . da\, d\alpha;$$

en supprimant, ce qui est permis, l'exposant infiniment petit $-ka$, qui devrait s'ajouter aux exposans $a(h-z)$ et $-a(h-z)$.

La valeur de a étant ainsi exprimée sous forme finie, on pourra faire telles suppositions qu'on voudra sur les fonctions $f\alpha$ et $\mathrm{F}\alpha$ qui se rapportent à l'état initial du fluide. Cette formule renferme la solution complète du problème qui nous occupe; car les différences partielles de φ par rapport à x, z et t feront connaître, au bout du temps t, les

vitesses et la pression qui ont lieu en un point quelconque du fluide (nº 1); et au moyen de l'équation (3), on déterminera, au même instant, la figure de sa surface.

(7) Lorsque la profondeur h est très-petite et qu'on néglige les puissances de h supérieures à la première, les intégrales disparaissent dans la valeur de φ, qui devient alors beaucoup plus simple. En effet l'équation (7) se réduit alors à $c^2=ga^2h$; d'où l'on tire $c=a\sqrt{gh}$; substituant cette valeur dans celle de φ, il vient

$$\varphi=\frac{1}{\pi}\cdot\iint f\alpha\left(\frac{e^{a(h-z)}+e^{-a(h-z)}}{e^{ah}+e^{-ah}}\right)\cdot\cos.(ax-a\alpha).\frac{\sin.at\sqrt{gh}}{a\sqrt{gh}}\cdot da\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\cdot\iint F\alpha\left(\frac{e^{a(h-z)}+e^{-a(h-z)}}{e^{ah}+e^{-ah}}\right)\cdot\cos.(ax-a\alpha).\cos.at\sqrt{gh}.da\,d\alpha.$$

En réduisant en série suivant les puissances de e^{-ah}, on aura une expression de cette forme :

$$\frac{e^{a(h-z)}+e^{-a(h-z)}}{e^{ah}+e^{-ah}}=\Sigma Ae^{-ak};$$

k étant une quantité positive du même ordre de petitesse que z et h; A désignant un coëfficient indépendant de α, et Σ, la somme d'une série infinie de termes semblables à Ae^{-ak}. La seconde partie de la valeur de φ deviendra donc

$$\varphi=\frac{1}{2\pi}.\ \Sigma A\iint F\alpha\Big(\cos.(ax+at\sqrt{gh}-a\alpha)$$
$$+\cos.(ax-at\sqrt{gh}-a\alpha)\Big)\,e^{-ak}da\,d\alpha;$$

et à cause que k doit être traitée comme une quantité infiniment petite, cette valeur se changera, en vertu du théorême du nº 5, en

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(F(x+t\sqrt{gh}) + F(x-t\sqrt{gh})\right)\Sigma A;$$

mais en faisant $a=0$ dans la valeur de $\Sigma A e^{-ak}$, on a $\Sigma A = 1$; on aura donc enfin

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(F(x+t\sqrt{gh}) + F(x-t\sqrt{gh})\right).$$

Quant à la première partie de la valeur de φ, elle se déduit évidemment de la seconde en la multipliant par dt, intégrant par rapport à t, et remplaçant la fonction F par f; si donc on fait, pour abréger, $\int fx\, dx = f_1 x$, cette seconde partie transformée sera

$$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{gh}}\left(f_1(x+t\sqrt{gh}) - f_1(x-t\sqrt{gh})\right).$$

En l'ajoutant à la précédente et observant que f et F désignent des fonctions arbitraires, on aura, pour la valeur complète de φ, dans le cas d'une profondeur considérée comme infiniment petite,

$$\varphi = fonct.\,(x+t\sqrt{gh}) + Fonct.\,(x-t\sqrt{gh}).$$

Ce résultat coïncide avec la solution du problême des ondes que M. Lagrange a donnée à la fin de la mécanique analytique, et suivant laquelle les ondes se propagent dans un filet d'eau d'une largeur verticale constante, avec une vîtesse indépendante de l'ébranlement primitif et propor-

tionnelle à la racine quarrée de cette largeur. Mais ce cas n'est pas celui qu'il importe de considérer, et pour nous rapprocher des observations les plus communes, nous allons, au contraire, supposer la profondeur du fluide très-grande et comme infinie par rapport à l'étendue des oscillations de ses molécules.

(8) En faisant h infinie, l'équation (7) donne $c=\sqrt{ag}$, et la valeur générale de φ devient

$$\varphi=\frac{1}{\pi}\cdot\iint f\alpha.\, e^{-az}.\, cos.(ax-a\alpha).\, \frac{sin.\, t\sqrt{ga}}{\sqrt{ga}}.\, da\, d\alpha$$
$$+\frac{1}{\pi}\cdot\iint \mathrm{F}\alpha.\, e^{-az}.\, cos.\,(ax-a\alpha).\, cos.\, t\sqrt{ga}.\, da\, d\alpha.$$

Avant d'aller plus loin, on peut remarquer que cette formule satisfait à l'équation (4), non-seulement pour la valeur particulière $z=0$, mais même pour une valeur quelconque de z, ainsi qu'il est facile de le vérifier. Or, en différenciant la valeur de p du nº 1, par rapport à t, on a

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dt}=g\frac{dz}{dt}-\frac{d^2\varphi}{dt^2}=g\frac{d\varphi}{dz}-\frac{d^2\varphi}{dt^2};$$

quantité nulle en vertu de l'équation (4); il s'ensuit donc que quand la profondeur est infinie, la pression p est indépendante du temps; c'est-à-dire que la même molécule éprouve la même pression pendant toute la durée du mouvement; propriété qui n'aurait pas lieu dans le cas d'une profondeur finie quelconque.

(9) Pour pouvoir faire usage de cette valeur de φ, il faut connaître les deux fonctions désignées par f et F qu'elle ren-

ferme. On a supposé $\frac{d\varphi}{dt} = fx$, quand $z=0$ et $t=0$; si donc on compte le temps t à partir de l'origine du mouvement, l'équation de la surface à cette origine sera, d'après l'équation (3), $gz' - fx = 0$; et comme elle doit être donnée dans chaque cas particulier, il s'ensuit que fx sera aussi connue. Quant à Fx, elle représente la valeur de φ qui répond à $t=0$; il serait aisé de prouver que cette quantité exprime la percussion qui a lieu à la surface du fluide, et qui imprime à ses molécules leurs vîtesses initiales : on pourrait donc aussi la supposer donnée en fonction de x; mais pour éviter quelques difficultés que présente le cas des vîtesses initiales, nous nous bornerons à considérer celui où le fluide part du repos, et où par conséquent ces vîtesses sont nulles dans toute l'étendue de la masse fluide.

Dans ce cas, la fonction désignée par F sera nulle, ce qui fera disparaître la seconde partie de la valeur de φ; de plus, nous mettrons gfx à la place de fx, afin que l'équation de la surface initiale soit $z' = fx$, et que fx représente l'ordonnée verticale d'un point quelconque de cette surface. Nous aurons alors

$$\varphi = \frac{\sqrt{g}}{\pi} \cdot \iint f\alpha . e^{-az} \cos. (ax - a\alpha) . \frac{\sin. t . \sqrt{ga}}{\sqrt{a}} \cdot da\, d\alpha. \quad (10).$$

Ainsi que nous l'avons expliqué au commencement de ce Mémoire, les ondes dont nous aurons à examiner la propagation seront censées produites par l'immersion d'un corps d'une forme donnée. Le fluide étant contenu dans un canal vertical, et les molécules ne devant pas avoir de vîtesse dans le sens de sa largeur, il faudra que ce corps

soit un cylindre horizontal perpendiculaire aux parois du canal, et qui en occupe la largeur entière : on l'enfonce dans le fluide jusqu'à une certaine profondeur, et après avoir donné au fluide le temps de revenir à l'état de repos, on retire subitement le cylindre et l'on abandonne le fluide à l'action de la pesanteur. L'immersion du cylindre détermine la figure initiale du fluide, en sorte que fx, dans la partie où elle n'est pas nulle, est égale à l'ordonnée du contour de la partie plongée de la base, l'axe des x étant la section *à fleur d'eau* de cette même base. Nous fixerons l'origine de ces abscisses, au milieu de cette section dont nous représenterons la largeur totale par $2l$; de cette manière fx sera nulle pour toutes les valeurs positives ou négatives de x, qui tomberont hors des limites $x=\pm l$, et l'intégrale relative à α, ne devra être prise que depuis $\alpha=-l$ jusqu'à $\alpha=+l$ (n° 5).

Avant de développer les lois de la propagation de cet ébranlement, soit à la surface, soit dans l'intérieur du fluide, nous allons donner diverses transformations de l'équation (10), qui nous seront utiles dans cette discussion.

(10) Si nous mettons pour le cosinus compris sous l'intégrale double, son expression en exponentielles imaginaires, et que nous fassions

$$a=u', \quad z+(x-\alpha)\sqrt{-1}=k, \quad z-(x-\alpha)\sqrt{-1}=k',$$

nous aurons

$$\varphi=\frac{\sqrt{g}}{\pi}\cdot\int\int f\alpha\left(e^{-ku'}+e^{-k'u'}\right)\cdot \sin. ut\sqrt{g}.\, du\, d\alpha,$$

et les limites relatives à u seront encore zéro et l'infini;

Soit, pour abréger,

$$\int e^{-ku^2} \sin. ut\sqrt{g}. du = y, \quad \int e^{-k'u^2} \sin. ut\sqrt{g}. du = y';$$

il en résultera

$$\varphi = \frac{\sqrt{g}}{\pi}. \int f\alpha. (y+y')\, d\alpha;$$

et il suffira de transformer l'expression de y : celle de y' s'en déduira en y changeant k en k'.

Or, en différenciant par rapport à t, on a

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{g}. \int e^{-ku^2} \cos. ut\sqrt{g}. u du;$$

intégrant par parties, et ayant égard aux limites $u=0$ et $u=\frac{1}{0}$, il vient

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{g}}{2k} - \frac{gt}{2k}. \int e^{-ku^2} \sin. tu\sqrt{g}. du:$$

pour déterminer y, on aura donc

$$\frac{dy}{dt} + \frac{gt}{2k}. y = \frac{\sqrt{g}}{2k}.$$

J'intègre cette équation, ce qui donne

$$y = \frac{\sqrt{g}}{2k}. e^{-\frac{gt^2}{4k}}. \int e^{\frac{gt^2}{4k}} dt;$$

et l'intégrale devra être prise de manière qu'elle s'évanouisse quand $t=0$, puisqu'alors on doit avoir $y=0$. En mettant tv à la place de t, cette valeur de y devient

$$y=\frac{t\sqrt{g}}{2k}\cdot\int e^{-\frac{gt^2(1-v^2)}{4k}}\,dv\,;$$

l'intégrale étant prise depuis $v=0$ jusqu'à $v=1$. On aura semblablement

$$y'=\frac{t\sqrt{g}}{2k'}\cdot\int e^{-\frac{gt^2(1-v^2)}{4k'}}\,dv\,;$$

substituant ces expressions dans celle de φ, remettant pour k et k' leurs valeurs, et faisant disparaître les imaginaires, il nous vient, toutes réductions faites,

$$\varphi=\frac{gt}{\pi}\cdot\iint\frac{f\alpha}{z^2+(x-\alpha)^2}\cdot e^{-\frac{gt^2z(1-v^2)}{4(z^2+(x-\alpha)^2)}}\left(z.\cos.\frac{gt^2(x-\alpha)(1-v^2)}{4(z^2+(x-\alpha)^2)}\right.$$
$$\left.+(x-\alpha).\ \sin.\ \frac{gt^2(x-\alpha)(1-v^2)}{4(z^2+(x-\alpha)^2)}\right)dv\,d\alpha. \qquad (11)$$

(11) Les valeurs de y et y' se réduisent facilement en séries ordonnées suivant les puissances de t^2. Si l'on fait généralement

$$\int(1-v^2)^n\,dv=A_n,$$

on aura

$$y=\frac{t\sqrt{g}}{2k}\left(A_0-\frac{gt^2}{4k}\cdot A_1+\left(\frac{gt^2}{4k}\right)^2\cdot\frac{A_2}{2}-\left(\frac{gt^2}{4k}\right)^3\cdot\frac{A_3}{2.3}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{gt^2}{4k}\right)^4\cdot\frac{A_4}{2.3.4}-\text{etc.}\right);$$

en intégrant par parties, et ayant égard aux limites $v=0$ et $v=1$, on trouve

$$A_n=\frac{2n}{2n+1}\cdot A_{n-1}\,;$$

et comme on a $A_0 = 1$, on en conclut

$$A_n = \frac{2^n.(1.2.3....n)}{1.3.5.7.....2n+1};$$

d'où il résulte

$$y = \frac{t\sqrt{g}}{2k}.\left(1 - \frac{1}{1.3}.\frac{gt^2}{2k} + \frac{1}{1.3.5}.\left(\frac{gt^2}{2k}\right)^2 - \frac{1}{1.3.5.7}.\left(\frac{gt^2}{2k}\right)^3 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{1.3.5.7.9}.\left(\frac{gt^2}{2k}\right)^4 - \text{etc.}\right).$$

En changeant k en k', on aura de même le développement de y', et par suite celui de la fonction φ. Cette série sera d'autant plus convergente, que la variable t sera plus petite; mais quelque petit que soit le temps, il est important d'observer que ce développement de φ suivant les puissances de t, sera en défaut relativement aux points de la surface fluide, compris dans l'étendue de l'ébranlement primitif. En effet on aura, par rapport à ces points, $z=0$, $k=(x-\alpha)\sqrt{-1}$, $k'=-(x-\alpha)\sqrt{-1}$; de plus, l'abscisse x sera comprise entre les limites $\pm l$ de l'intégrale relative à α; par conséquent, les puissances de $x-\alpha$, qui seront aux dénominateurs dans les valeurs de y et y' en séries, deviendront nulles entre ces limites, et en même temps les intégrales des termes de ces séries substituées dans la valeur de φ, deviendront infinies. Relativement à ces points particuliers, la fonction φ n'est pas susceptible de se développer suivant les puissances de t, non plus que les différences partielles $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dz}$; et si l'on veut connaître, à un instant quelconque, la vîtesse horizontale ou verticale d'un de ces points, on ne pourra en déterminer la valeur numérique que par la

méthode des quadratures, au moyen de l'équation (10) différenciée par rapport à x ou à z.

Si, au contraire, on suppose qu'il s'agisse d'un point très-éloigné de l'ébranlement primitif, et si l'on néglige en conséquence α par rapport à x et z, dans les valeurs de k et k', elles se réduiront à $k=z+x\sqrt{-1}$, $k'=z-x\sqrt{-1}$, et en faisant la somme des valeurs de y et y' en séries, on aura

$$y+y'=\frac{t\sqrt{g}}{2(z^2+x^2)}\left(k+k'-\frac{k^2+k'^2}{1.3}\cdot\frac{gt^2}{2(z^2+x^2)}+\frac{k^3+k'^3}{1.3.5}\cdot\left(\frac{gt^2}{2(z^2+x^2)}\right)^2\right.$$
$$\left.-\frac{k^4+k'^4}{1.3.5.7}\cdot\left(\frac{gt^2}{2(z^2+x^2)}\right)^3+\text{etc.}\right).$$

Donc, en faisant $\int f\alpha\, d\alpha=A$, de manière que A soit l'aire du segment plongé qui a produit l'ébranlement, nous aurons

$$\varphi=\frac{gtA}{\pi}\cdot\left(\frac{z}{z^2+x^2}-\frac{(z^2-x^2)gt^2}{6(z^2+x^2)^2}+\frac{(z^3-3zx^2)g^2t^4}{60(z^2+x^2)^3}-\text{etc.}\right).$$

De-là on tirera des séries semblables et qu'il est inutile d'écrire, pour les valeurs des vîtesses $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dz}$. On aurait obtenu la même valeur de φ, au moyen de l'équation (10), en remplaçant, sous le signe intégral, $x-\alpha$ par x, et développant $\sin. t\sqrt{gu}$ suivant les puissances de t.

(12) Ces résultats montrent que dans un fluide incompressible, comme celui que nous considérons, l'ébranlement produit en un point quelconque se transmet instantanément dans toute l'étendue de la masse ; car quelque petit que soit t, et, au contraire, quelque grandes que soient les coor-

données x et z, les vitesses $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dz}$ auront toujours des valeurs finies et assignables. Si l'on veut savoir suivant quelles lois le mouvement commence, ou quelles sont les valeurs de ces vîtesses dans le premier moment, il suffira de conserver les premiers termes des séries qui les représentent, et l'on aura simplement

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{2gtA}{\pi} \cdot \frac{zx}{(z^2+x^2)^2}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{gtA}{\pi} \cdot \frac{x^2-z^2}{(z^2+x^2)^2}.$$

Appelant r la distance d'une molécule au centre de l'ébranlement, et θ l'angle que ce rayon r fait avec la verticale menée par ce centre, c'est-à-dire supposant

$$z = r.\cos.\theta, \quad x = r.\sin.\theta;$$

ces vîtesses deviendront

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{gtA.\sin.2\theta}{\pi r^2}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{gtA.\cos.2\theta}{\pi r^2};$$

et si nous désignons par V, leur résultante, nous aurons

$$V = \frac{gtA}{\pi r^2}.$$

Ainsi les premières vîtesses des molécules sont les mêmes, à distances égales du lieu de l'ébranlement; elles suivent la raison inverse du quarré de cette distance, et sont proportionnelles au temps et à l'aire A. On voit aussi, d'après le rapport de la vîtesse verticale à la vîtesse horizontale, que chaque molécule commence à se mouvoir suivant une direction qui fait avec la verticale un angle 2θ, double de celui qui répond à la direction du rayon r.

(13) Il est bon de connaître aussi les lois suivant lesquelles le mouvement finit dans la masse fluide, ou les valeurs des vîtesses qui ont lieu au bout d'un temps très-considérable ; pour cela nous allons chercher à développer la fonction φ suivant les puissances négatives de t.

En faisant $1-v^2=u$, la valeur de y du n° 10 devient

$$y=\frac{t\sqrt{g}}{4k}\cdot\int\frac{e^{-\frac{gt^2u}{4k}}\,du}{\sqrt{1-u}};$$

l'intégrale doit encore être prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$; mais nous la partagerons en deux portions : la première depuis $u=0$ jusqu'à $u=1-a$, et la seconde depuis $u=1-a$ jusqu'à $u=1$; la quantité a étant une indéterminée dont nous nous réservons de disposer convenablement.

Par le procédé de l'intégration par parties, on réduit la première portion en cette double série :

$$\frac{1}{t\sqrt{g}}\left(1+\frac{2k}{gt^2}+1.3.\left(\frac{2k}{gt^2}\right)^2+1.3.5.\left(\frac{2k}{gt^2}\right)^3+1.3.5.7.\left(\frac{2k}{gt^2}\right)^4+\text{etc.}\right)$$

$$-\frac{1}{t\sqrt{ga}}\cdot e^{-\frac{gt^2(1-a)}{4k}}\left(1+\frac{2k}{gt^2a}+1.3.\left(\frac{2k}{gt^2a}\right)^2+1.3.5.\left(\frac{2k}{gt^2a}\right)^3+\text{etc.}\right).$$

La seconde portion sera exprimée par l'intégrale

$$\frac{t\sqrt{g}}{4k}e^{-\frac{gt^2}{4k}}\int e^{\frac{gt^2a}{4k}}\cdot\frac{da}{\sqrt{a}},$$

qui devra être prise depuis $a=0$ jusqu'à la valeur indéterminée de a. Or, en faisant

$$arc\left(\cos. = \frac{z}{\sqrt{z^2+(x-a)^2}}\right)=\psi,$$

la valeur de k prend la forme :

$$k=\sqrt{z^2+(x-a)^2}.\ e^{\psi\sqrt{-1}};$$

et si l'on fait en même temps

$$a=\frac{2\sqrt{z^2+(x-a)^2}}{gt^2}.\ b^2,$$

on aura, pour la valeur complète de y,

$$y=\frac{1}{t\sqrt{g}}\left(1+\frac{2k}{gt^2}+1.3.\left(\frac{2k}{gt^2}\right)^2+1.3.5.\left(\frac{2k}{gt^2}\right)^3\right.$$
$$\left.+1.3.5.7.\left(\frac{2k}{gt^2}\right)^4+\text{etc.}\right)+\frac{B}{\sqrt[4]{4z(+4)x-a)^2}}.\ e^{-\frac{gt^2}{4k}},$$

en posant, pour abréger,

$$B=e^{-\psi\sqrt{-1}}\int db\, e^{\frac{b^2}{2}(\cos.\psi-\sin.\psi.\sqrt{-1})}$$
$$+\frac{1}{b}e^{\frac{b^2}{2}(\cos.\psi-\sin.\psi.\sqrt{-1})}\left(1+\frac{e^{-\psi\sqrt{-1}}}{b^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1.3.e^{-2\psi\sqrt{-1}}}{b^4}+\frac{1.3.5.e^{-3\psi\sqrt{-1}}}{b^6}+\frac{1.3.5.7.e^{-4\psi\sqrt{-1}}}{b^8}+\text{etc.}\right);$$

l'intégrale relative à b devant s'évanouir quand $b=0$, et s'étendre à une valeur indéterminée de cette quantité.

Maintenant on peut prendre b de manière que la série

contenue dans B soit aussi convergente que l'on voudra dans ses premiers termes, ce qui suffit pour en pouvoir calculer la valeur approchée : par la méthode des quadratures, on obtiendra la valeur de l'intégrale relative à b, contenue également dans B; on pourrait donc calculer par approximation la valeur complète de cette quantité ; mais ici, il nous suffira d'observer qu'elle est indépendante de t; d'où il résulte que quand t est supposé très-grand, il est permis, en général, de supprimer le terme qui renferme B dans la valeur de y, a cause du facteur exponentiel $e^{-\frac{gt^2}{4k}}$ qui devient alors extrêmement petit. Je dis *en général*, parce qu'en remettant pour k sa valeur $z+(x-\alpha)\sqrt{-1}$, on a

$$e^{-\frac{gt^2}{4k}}=e^{-\frac{gt^2 z}{4z^2+4(x-\alpha)^2}}\left(\cos.\frac{gt^2(x-\alpha)}{4z^2+4(x-\alpha)^2}-\sin.\frac{gt^2(x-\alpha)}{4z^2+4(x-\alpha)^2}\cdot\sqrt{-1}\right).$$

Or, en même temps que gt^2 est très-grand par rapport à x, si cette abscisse est aussi très-grande par rapport à l'ordonnée z, de telle sorte que $\frac{x}{z}$ soit du même ordre de grandeur que $\frac{gt^2}{x}$, il arrivera que l'exposant négatif du facteur exponentiel cessera d'être très-grand, et le facteur d'être très-petit; par conséquent il ne sera plus permis de supprimer le terme multiplié par ce facteur. Cette exception aura lieu pour les points de la surface, et généralement pour les points qui sont tels que la droite qui les joint au centre de l'ébranlement primitif fait un très-petit angle avec le niveau du fluide; en convenant donc de ne pas les considérer, nous pouvons supprimer le terme qui renferme B dans la valeur de y, et nous aurons simplement

$$y = \frac{1}{t\sqrt{g}}\left(1 + \frac{2k}{gt^2} + 1.3.\left(\frac{2k}{gt^2}\right)^2 + 1.3.5.\left(\frac{2k}{gt^2}\right)^3 \right.$$
$$\left. + 1.3.5.7.\left(\frac{2k}{gt^2}\right)^4 + \text{etc.}\right).$$

Changeant k en k' pour avoir y', l'ajoutant ensuite à y, et remettant pour k et k', leurs valeurs, il vient

$$y + y' = \frac{2}{t\sqrt{g}}\left(1 + \frac{2z}{gt^2} + \frac{12(z^2 - (x-\alpha)^2)}{g^2t^4} + \frac{120(z^3 - 3z(x-\alpha)^2)}{g^3t^6} + \text{etc.}\right).$$

Si donc on fait

$$\int f\alpha . d\alpha = \text{A}, \int f\alpha . \alpha d\alpha = \text{A}', \int f\alpha . \alpha^2 d\alpha = \text{A}'', \text{ etc.},$$

la valeur de φ du nº 10 deviendra

$$\varphi = \frac{2}{\pi t}\left(\text{A} + \frac{2z\text{A}}{gt^2} + \frac{12(\text{A}z^2 - \text{A}x^2 + 2\text{A}'x - \text{A}'')}{g^2t^4}\right.$$
$$\left. + \frac{120(\text{A}z^3 - 3\text{A}zx^2 + 6\text{A}'zx - 3\text{A}''z)}{g^3t^6} + \text{etc.}\right).$$

On déduira de-là pour $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dz}$, des valeurs en séries qui seront d'autant plus exactes que le temps sera plus considérable.

En s'en tenant au premier terme de chacune de ces valeurs, afin de connaître les dernières vitesses des molécules, on aura

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{48(\text{A}x - \text{A}')}{\pi g^2 t^5}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{4\text{A}}{\pi g t^3}.$$

On voit donc que, vers la fin du mouvement, les vitesses horizontales sont insensibles par rapport aux vitesses verticales,

puisque celles-ci sont en raison inverse du cube du temps, et les autres en raison inverse de sa cinquième puissance. La valeur de $\frac{d\varphi}{dz}$ étant positive et indépendante des cordonnées x et z, il s'ensuit que le mouvement final est le même pour toutes les molécules que nous considérons, et qu'il se fait dans le sens de la pesanteur.

(14) Il est important d'observer, pour l'exactitude de notre analyse, que le corps dont l'immersion produit l'ébranlement du fluide ne doit jamais être très-enfoncé, c'est-à-dire, que la flèche du segment plongé doit toujours être assez petite par rapport à sa section *à fleur d'eau;* car si le contraire avait lieu il est évident que, dans le premier moment, les mêmes molécules ne pourraient plus rester à la surface du fluide; ce qui détruirait l'hypothèse du n° 2 sur laquelle est fondée l'une des équations différentielles dont nous sommes partis. Or, quelle que soit la forme du corps, si on le suppose très-peu enfoncé, la courbe qui termine le segment plongé se confondra sensiblement avec sa parabole osculatrice au point le plus bas; dans ce cas, on pourra donc prendre pour fx, qui représente l'ordonnée verticale de cette courbe, une valeur de cette forme :

$$fx = \frac{h(l^2 - x^2)}{l^2};$$

h étant la flèche du segment plongé, et l représentant, comme dans le n° 9, la demi-largeur de sa base. Au moyen de cette valeur, l'équation (10) du même numéro devient

$$\varphi = \frac{h\sqrt{g}}{\pi l^2} \cdot \iint (l^2 - \alpha^2) e^{-az} \cdot \cos.(ax - a\alpha) \cdot \frac{\sin. t\sqrt{ga}}{\sqrt{a}} \cdot da\, d\alpha; \quad (12)$$

et l'on devra se rappeler que l'intégrale relative à α doit être prise seulement depuis $\alpha = -l$ jusqu'à $\alpha = +l$.

Cette intégration peut s'effectuer par les règles ordinaires : en ayant égard à ses limites, on trouve

$$\varphi = \frac{4h\sqrt{g}}{\pi l^2} \cdot \int \frac{(\sin. al - al. \cos. al)}{a^3} \cdot e^{-az} \cdot \cos. ax. \frac{\sin. t\sqrt{ga}}{\sqrt{a}} \cdot da.$$

On déduit de-là, pour l'ordonnée z' de la surface, en vertu de l'équation (3) du nº 1,

$$z' = \frac{4h}{\pi l^2} \cdot \int \frac{(\sin. al - al. \cos. al)}{a^3} \cdot e^{-az} \cdot \cos. ax. \cos. t\sqrt{ga}. \, da;$$

et pour l'expression des vîtesses horizontale et verticale d'une molécule quelconque

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{4h\sqrt{g}}{\pi l^2} \cdot \int \frac{(\sin. al - al. \cos. al)}{a^2} \cdot e^{-az} \cdot \sin. ax. \frac{\sin. t\sqrt{ga}}{\sqrt{a}} \cdot da,$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{4h\sqrt{g}}{\pi l^2} \cdot \int \frac{(\sin. al - al. \cos. al)}{a^2} \cdot e^{-az} \cdot \cos. ax. \frac{\sin. t\sqrt{ga}}{\sqrt{a}} \cdot da.$$

Ces diverses intégrales relatives à a ne peuvent pas s'obtenir sous forme finie; mais on peut assigner des limites à leurs valeurs qui auront l'avantage de prouver que cette ordonnée et ces vîtesses demeurent toujours très-petites et de l'ordre de la quantité h; ce qui est aussi très-important pour l'exactitude de notre analyse; car si les vîtesses des molécules pouvaient cesser d'être très-petites pour certaines valeurs de x, z et t, les équations différentielles des nos 1 et 2 ne seraient plus exactes, et l'on serait fondé à douter des résultats qui s'en déduisent, même pour d'autres valeurs de ces variables.

(15) Pour obtenir les limites dont nous parlons, j'observe que chaque intégrale devant être prise depuis $a=0$ jusqu'à $a=\frac{1}{0}$, on peut la partager en deux portions : l'une depuis $a=0$ jusqu'à $a=\frac{1}{l}$, et l'autre depuis $a=\frac{1}{l}$ jusqu'à $a=\frac{1}{0}$. Dans la première partie, on a

$$\sin. al - al. \cos. al < \frac{a^3 l^3}{3},$$

comme on peut s'en assurer par le développement en série; dans la seconde, on pourra supposer

$$\sin. al - al. \cos. al < 1 + al;$$

d'ailleurs l'exponentielle e^{-az} et les sinus et cosinus de ax et de $t\sqrt{ag}$, sont toujours moindres que l'unité; mettant donc l'unité à la place de chacune de ces quantités, et remplaçant le facteur $\sin. al - al. \cos. al$, par les limites de sa valeur, on en conclura, abstraction faite du signe,

$$z' < \frac{4h}{\pi l^3}.\int' \frac{l^3 da}{3} + \frac{4h}{\pi l^3}.\int \frac{(1+al)\,da}{a^3},$$

$$\frac{d\varphi}{dx} \text{ et } \frac{d\varphi}{dz} < \frac{4h\sqrt{g}}{\pi l^3}.\int' \frac{l^3\sqrt{a}\,da}{3} + \frac{4h\sqrt{g}}{\pi l^3}.\int \frac{(1+al)\,da}{a^3\sqrt{a}};$$

les intégrales indiquées par $\int'$ devant être prises depuis $a=0$ jusqu'à $a=\frac{1}{l}$, et les autres, depuis $a=\frac{1}{l}$ jusqu'à $a=\frac{1}{0}$. En effectuant le calcul, on trouve

$$z' < \frac{22h}{3\pi}, \quad \frac{d\varphi}{dx} \text{ et } \frac{d\varphi}{dz} < \frac{104h}{9\pi l}.\sqrt{gl},$$

pour les limites demandées.

(16) Il est encore bon de vérifier que la valeur de z' qui répond à $t=0$, coïncide avec la valeur initiale de cette ordonnée, savoir :

$$z'=\frac{h(l^2-x^2)}{l^2}, \text{ ou } z'=0,$$

selon que la variable x est comprise entre $-l$ et $+l$, ou qu'elle tombe hors de ces limites.

Pour cela, après avoir fait $t=0$ dans l'expression générale de z', j'observe qu'on peut l'écrire sous cette forme :

$$z'=\frac{2h}{\pi l^2}\left[\int\frac{\sin.a(l+x)-a(l+x).\cos.a(l+x)}{a^3}.da\right.$$
$$-x\int\frac{1-\cos.a(l+x)}{a^2}.da+\int\frac{\sin.a(l-x)-a(l-x).\cos.a(l-x)}{a^3}.da$$
$$\left.+x.\int\frac{1-\cos.a(l-x)}{a^2}.da\right];$$

ces quatre intégrales étant toujours prises depuis $a=0$ jusqu'à $a=\frac{1}{0}$. Or, d'après une formule connue, on a, entre ces limites,

$$\int\frac{\sin.ay}{a}.da=\pm\frac{\pi}{2},$$

en prenant le signe + ou le signe —, suivant que la quantité y est positive ou négative; si donc, pour fixer les idées, on suppose x positive; que l'on multiplie cette équation par dy, et qu'on intègre ensuite par rapport à y, depuis $y=0$ jusqu'à $y=l+x$, on en conclura

$$\int\frac{1-\cos.a(l+x)}{a^2}.da=\frac{\pi}{2}(l+x).$$

De même, si l'on change la formule citée, en celle-ci :

$$\int \frac{a^2 y \,.\, \sin.\, ay}{a^3} \,.\, da = \frac{\pi y}{2}\,;$$

qu'on la multiplie encore par dy, et qu'on intègre depuis $y=0$ jusqu'à $y=l+x$, on aura

$$\int \frac{\sin.\, a(l+x) - a(l+x).\, \cos.\, a(l+x)}{a^3} \,.\, da = \frac{\pi}{4}(x+l)^2.$$

On trouvera de même, en intégrant ces formules depuis $y=0$ jusqu'à $y=l-x$,

$$\int \frac{1 - \cos.\, a(l-x)}{a^2} \,.\, da = \pm \frac{\pi}{2}(l-x),$$

$$\int \frac{\sin.\, a(l-x) - a(l-x).\, \cos.\, a(l-x)}{a^3} \,.\, da = \pm \frac{\pi}{4}(l-x)^2;$$

pourvu que l'on prenne les signes supérieurs, quand $l-x$ est positive, et les inférieurs, dans le cas contraire.

Je substitue les valeurs de ces quatre intégrales, dans z'; en faisant les réductions, il vient

$$z' = \frac{h}{2\,l^2}\left[l^2 - x^2 \pm (l^2 - x^2)\right];$$

le signe supérieur ou le signe inférieur ayant lieu, suivant qu'on a $x < l$ ou $x > l$: on aura donc, dans le premier cas, $z' = \frac{h(l^2-x^2)}{l^2}$, et dans le second, $z'=0$; ce qu'on se proposait effectivement de vérifier.

§ III.

Propagation des ondes à la surface, dans le cas d'un canal vertical, d'une largeur constante et d'une très-grande profondeur.

(17) En supposant le corps qui a produit les ondes, très-peu enfoncé dans le fluide, les lois de leur propagation apparente à sa surface, dépendent, dans le cas que nous considérons, de la valeur de z', déduite immédiatement de l'équation (12). Nous aurons de cette manière

$$z' = \frac{h}{\pi l^2} \cdot \iint (l^2 - \alpha^2) . \cos. (ax - a\alpha) . \cos. t \sqrt{ga} . da\, d\alpha ;$$

l'intégrale double étant prise depuis $a = 0$ jusqu'à $a = \frac{1}{0}$, et depuis $\alpha = -l$ jusqu'à $\alpha = + l$.

Il est aisé de voir, d'après cette expression, que les valeurs de z' seront égales et de mêmes signes, pour des valeurs de x égales et de signes contraires ; la propagation des ondes est donc semblable de part et d'autre de l'ébranlement primitif, et il nous suffira, par exemple, d'examiner ce qui a lieu dans le sens des x positives. Relativement aux points voisins de cet ébranlement, les valeurs de z' ne présentent rien de remarquable ; ce n'est que dans la partie qui en est éloignée, que la propagation se fait suivant des lois régulières qui méritent d'être déterminées : nous supposerons donc, dans ce qui va suivre, la variable x positive et très-grande par rapport à la demi-largeur l de l'ébranlement primitif, et, par conséquent aussi, très-grande par rapport à la variable α.

(18) Cela posé, voici comment on peut transformer l'intégrale relative à a, dont les limites sont zéro et l'infini, en une autre plus simple dont les limites seront zéro et l'unité.

En faisant $a=v^2$, les limites relatives à v restent les mêmes que part rapport à a, et l'on a

$$\int \cos.\,(ax-a\alpha).\,\cos.\,t\sqrt{ga}.\,da=\int \cos.\left(v^2\,(x-\alpha)+vt\sqrt{g}\right)\cdot dv$$
$$+\int \cos.\left(v^2(x-\alpha)-vt\sqrt{g}\right)\cdot dv.$$

Dans la première de ces deux intégrales relatives à v, faisons

$$v\sqrt{x-\alpha}+\frac{t\sqrt{g}}{2\sqrt{x-\alpha}}=\frac{v'\,t\sqrt{g}}{2\sqrt{x-\alpha}},$$

et dans la seconde

$$v\sqrt{x-\alpha}-\frac{t\sqrt{g}}{2\sqrt{x-\alpha}}=\frac{v''\,t\sqrt{g}}{2\sqrt{x-\alpha}};$$

nous aurons

$$\int \cos.(ax-a\alpha).\cos.t.\sqrt{ga}.da=\frac{gt^2}{4(x-\alpha)^2}\cdot\int \cos.\left(\frac{gt^2(v'^2-1)}{4(x-\alpha)}\right)\cdot(v'-1)\,dv'$$
$$+\frac{gt^2}{4(x-\alpha)^2}\cdot\int \cos.\left(\frac{gt^2(v''^2-1)}{4(x-\alpha)}\right)\cdot(v''-1)\,dv'';$$

et comme à $v=0$ répondent $v'=1$ et $v''=-1$, et que pour $v=\frac{1}{0}$, on a $v'=\frac{1}{0}$, $v''=\frac{1}{0}$, il s'ensuit que la première de ces deux nouvelles intégrales sera prise depuis $v'=1$ jusqu'à $v'=\frac{1}{0}$, et la seconde, depuis $v''=-1$ jusqu'à $v''=\frac{1}{0}$. Or, en considérant ces limites avec un peu d'attention, il est facile de voir que la somme de ces deux intégrales définies est équivalente à celle-ci :

$$\int \cos.(ax-a\alpha).\cos.t\sqrt{ga}.da = \frac{gt^2}{2(x-\alpha)^2}\int \cos.\left(\frac{gt^2(u'^2-1)}{4(x-\alpha)}\right).u'du'$$

$$+\frac{gt^2}{2(x-\alpha)^2}\int \cos.\left(\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)}\right).(1-u)du\,;$$

l'intégrale relative à u' étant prise depuis $u'=0$ jusqu'à $u'=\frac{1}{0}$, et l'autre, depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$. Mais par rapport à ces limites, on a

$$\int \cos.\frac{gt^2u'^2}{4(x-\alpha)}.u'du'=0,\quad \int \sin.\frac{gt^2u'^2}{4(x-\alpha)}.u'du'=\frac{2(x-\alpha)}{gt^2},$$

$$\int \cos.\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)}.udu=\frac{2(x-\alpha)}{gt^2}.\sin.\frac{gt^2}{4(x-\alpha)}\,;$$

et, en substituant ces valeurs dans la formule précédente, on obtient ce résultat remarquable :

$$\int \cos.(ax-a\alpha).\sin.t\sqrt{ga}.da=\frac{gt^2}{2(x-\alpha)^2}\int \cos.\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)}.du, \quad (13)$$

au moyen duquel la valeur de z' devient

$$z'=\frac{hgt^2}{2\pi l^2}.\iint \frac{l^2-\alpha^2}{(x-\alpha)^2}.\cos.\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)}.du\,d\alpha. \quad (14)$$

Pour qu'il ne puisse rester aucun doute sur cette transformation, il est bon d'observer que cette valeur de z' résulte immédiatement de l'équation (11) du nº 10, en y faisant

$$f\alpha=\frac{h(l^2-\alpha^2)}{l^2}.$$

En effet, en vertu de l'équation (3) du nº 1, on en déduit

$$z' = \frac{h}{\pi l^2} \iint \frac{l^2-\alpha^2}{(x-\alpha)^2} \left[(x-\alpha).\, sin. \frac{gt^2(1-v^2)}{4(x-\alpha)} \right.$$

$$\left. + \frac{gt^2(1-v^2)}{2}.\, cos. \frac{gt^2(1-v^2)}{4\,(x-\alpha)}\right].\; dv.d\alpha\;;$$

mais on a identiquement

$$\int \left[(x-\alpha).\, sin. \frac{gt^2(1-v^2)}{4(x-\alpha)} - \frac{gt^2 v^2}{2}.\, cos. \frac{gt^2(1-v^2)}{4(x-\alpha)}\right] dv$$

$$= (x-\alpha)v.\, sin. \frac{gt^2(1-v^2)}{4(x-\alpha)}\;;$$

et comme cette quantité est nulle aux deux limites $v=0$ et $v=1$, la nouvelle valeur de z' devient la même que la précédente, en y mettant u à la place de v.

(19) Lorsque x est très-grande par rapport à α, ainsi que nous venons de le supposer, on peut remplacer, hors du *cosinus*, $x-\alpha$ par x; et si, en même temps, la quantité gt^2 n'est pas très-grande par rapport à x, on peut aussi mettre x à la place de $x-\alpha$, sous le *cosinus*. De cette manière, l'intégration relative à α s'effectue immédiatement : entre les limites $\alpha=-l$ et $\alpha=+l$, on a $\int(l^2-\alpha^2)\; dl = \frac{4l^3}{3}$; et il en résulte pour z', cette valeur approchée :

$$z' = \frac{2hlgt^2}{3\pi x^2}.\int cos. \frac{gt^2(1-u^2)}{4x}.\; du. \quad (15)$$

Elle se réduit sans difficulté en série suivant les puissances de gt^2: si l'on fait généralement

$$\int(1-u^2)^n\; du = A_n\,,$$

on aura d'abord

$$z' = \frac{2hlgt^2}{3\pi x^2} \cdot \left(A_0 - \frac{A_2}{2} \cdot \left(\frac{gt^2}{4x}\right)^2 + \frac{A_4}{2.3.4} \cdot \left(\frac{gt^2}{4x}\right)^4 - \frac{A_6}{2.3.4.5.6} \cdot \left(\frac{gt^2}{4x}\right)^6 + \text{etc.} \right);$$

on trouvera, comme dans le nº 11,

$$A_{2n} = \frac{4^n (1.2.3 \ldots . 2n)}{1.3.5.7 \ldots \ldots 4n+1};$$

par conséquent on aura

$$z' = \frac{4hl}{3\pi x} \left(\frac{gt^2}{2x} - \frac{1}{1.3.5.7} \cdot \left(\frac{gt^2}{2x}\right)^3 + \frac{1}{1.3.5.7.9.11} \cdot \left(\frac{gt^2}{2x}\right)^5 - \frac{1}{1.3.5.7.9.11.13} \left(\frac{gt^2}{2x}\right)^7 + \text{etc.} \right);$$

série que l'on déduirait aussi très-aisément des séries trouvées dans ce même numéro.

En s'en tenant à son premier terme, on aurait

$$z' = \frac{2hlgt^2}{3\pi x^2};$$

valeur positive, qui montre qu'à une distance sensible du lieu de l'ébranlement, le fluide commence par s'abaisser au-dessous de son niveau primitif, et que cet abaissement est d'abord proportionnel au quarré du temps, et en raison inverse du quarré de cette distance.

Si l'on égale à zéro la différentielle de z', prise par rapport à x, on déterminera, pour un instant donné, les points les plus élevés et les plus abaissés de la surface fluide, lesquels seront les sommets des ondes apparentes qui se propageront à cette surface. En faisant, pour abréger,

$$\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^2=p,$$

cette équation $\frac{dz'}{dx}=0$, sera

$$1-\frac{2p}{1.3.5}+\frac{3p^2}{1.3.5.7.9}-\frac{4p^3}{1.3.5.7.9.11.13}$$
$$+\frac{5p^4}{1.3.5.7.9.11.13.15.17}-\text{etc.}=0. \quad (16)$$

Ses racines réelles et positives feront connaître les points dont nous parlons; elles seront en nombre infini, et formeront une suite continuellement croissante; mais on devra rejeter toutes les valeurs très-grandes de p, parce que l'équation (15) dont nous sommes partis, suppose que le rapport de gt^2 à x, et par conséquent p, n'est pas devenu une très-grande quantité.

Relativement à une racine quelconque de cette équation, on aura

$$x=\frac{gt^2}{2\sqrt{p}},$$

où l'on voit que le mouvement apparent de chaque ordonnée *maxima* ou *minima*, est analogue à celui des corps pesans dans le vide, avec une vîtesse indépendante de l'ébranlement primitif, et qui sera à celle de ces corps, comme l'unité est à $\sqrt{p}$. Chacune de ces ordonnées ayant ainsi sa vîtesse particulière, les sommets des ondes s'écarteront les uns des autres, à mesure qu'ils s'éloigneront du lieu de l'ébranlement; et les intervalles entre deux sommets successifs, qu'on peut prendre pour *largeurs* des ondes, croîtront en raison directe du quarré du temps. Au contraire, leurs *hauteurs*, ou les ordonnées de leurs sommets, suivront la

raison inverse de ce quarré, ou, ce qui est la même chose, la raison inverse de leur distance au lieu de l'ébranlement; car si l'on met dans la valeur de z' en série, une des valeurs de $\frac{gt^2}{2x}$, que donne l'équation précédente, on aura évidemment un résultat de cette forme :

$$z = \frac{hl}{gt^2} \cdot P \text{ ou } z' = \frac{hl}{x} \cdot P';$$

P et P' désignant des quantités numériques, indépendantes de x et de t.

(20) Parmi ces ondes successives, la plus importante à considérer, est celle dont le mouvement est le plus rapide, ou qui précède toutes les autres, parce qu'encore bien que le mouvement se transmette instantanément dans toute la masse fluide, cependant c'est à cette onde qu'on peut rapporter le premier ébranlement sensible de la surface aux points où elle parvient. Elle répond à la plus petite racine de l'équation (16); or, après un très-petit nombre d'essais, on trouve que cette racine est comprise entre 9, 4 et 9, 5; et, par la méthode ordinaire, on obtient, pour sa valeur approchée, $p = 9,4482$. On aura donc, pour le mouvement du sommet de la première onde,

$$x = \frac{gt^2}{2}(0,3253);$$

ce qui montre que ce point se propage avec une vitesse qui est un peu moindre que le tiers de celle des corps pesans. On trouve pour son ordonnée, calculée au moyen de la série précédente et correspondante à cette racine de l'équation (16),

$$z'=\frac{hl}{gt^2}(3,6777), \text{ ou } z'=\frac{hl}{x}(0,5982).$$

La seconde racine de cette équation est comprise entre 71 et 72; en prenant $p=71,5$, on a, pour le mouvement de la deuxième onde, rapporté à son sommet,

$$x=\frac{gt^2}{2}(0,1183),$$

et pour l'ordonnée verticale de ce point,

$$z'=-\frac{hl}{gt^2}(25,114), \text{ ou } z'=-\frac{hl}{x}(1,4512).$$

(21) La variable x étant toujours très-grande par rapport à α, lorsque $\frac{gt^2}{4}$ est aussi devenu très-grand relativement à x, de manière que le rapport $\frac{gt^2}{4x}$ soit du même ordre que $\frac{x}{\alpha}$, il n'est plus permis de remplacer, dans l'équation (14), $x-\alpha$ par x sous le *cosinus* qu'elle renferme; car on a, à très-peu près,

$$\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)}=\frac{gt^2(1-u^2)}{4x}+\frac{gt^2(1-u^2)\alpha}{4x^2};$$

et quelque grand que soit le premier terme, si l'on en retranche la somme des circonférences entières qu'il contient, il devient du même ordre que le second; par conséquent celui-ci ne peut plus être négligé par rapport au premier. Pour effectuer, dans ce cas, l'intégration relative à u, nous allons d'abord intégrer depuis $u=0$ jusqu'à $u=\frac{1}{0}$; ensuite depuis $u=1$ jusqu'à $u=\frac{1}{0}$; puis nous retrancherons le second

résultat du premier, ce qui donnera l'intégrale prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$.

Or, relativement aux limites $u=0$ et $u=\frac{1}{\alpha}$, on a, par les formules connues,

$$\frac{gt^2}{(x-\alpha)^2}\cdot\int \cos.\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)}\cdot du=\frac{t\sqrt{2g\pi}}{2(x-\alpha)^{\frac{3}{2}}}\left(\cos.\frac{gt^2}{4(x-\alpha)}+\sin.\frac{gt^2}{4(x-\alpha)}\right).$$

En intégrant par parties, on aura

$$\frac{gt^2}{(x-\alpha)^2}\cdot\int \cos.\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)}\cdot\frac{udu}{u}=-\frac{2}{(x-\alpha)u}\cdot\sin.\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)}$$
$$-\frac{2}{x-\alpha}\cdot\int \sin.\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)}\cdot\frac{du}{u^2},$$

Si l'on continue de même et qu'on passe ensuite aux limites $u=1$ et $u=\frac{1}{\alpha}$, on obtiendra une série ordonnée suivant les puissances négatives de gt^2; en la retranchant de la première portion de notre intégrale, il vient, pour sa valeur complète,

$$\left.\begin{aligned}\frac{gt^2}{(x-\alpha)^2}\cdot\int \cos.\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)}\cdot du=\frac{t\sqrt{2g\pi}}{2(x-\alpha)^{\frac{3}{2}}}\left(\cos.\frac{gt^2}{4(x-\alpha)}+\sin.\frac{gt^2}{4(x-\alpha)}\right)\\ -\frac{4}{gt^2}-\frac{3.5.16(x-\alpha)^2}{g^3t^6}-\frac{3.5.7.9.64(x-\alpha)^4}{g^5t^{10}}-\text{etc.}\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

On vérifie, par ce résultat, la nécessité de conserver $x-\alpha$ sous les *cosinus* et *sinus*; car si l'on y mettait x à la place de $x-\alpha$, la valeur de z', donnée par l'équation (14), deviendrait infinie pour t infini, ce qui serait une absurdité.

Après qu'on aura substitué cette valeur de l'intégrale relative à u, dans l'équation (14), il restera à effectuer l'intégration relative à α, dont les limites seront $\pm l$. Pour cela, je fais

$$\alpha = lv, \quad \frac{gt^2 l}{4x^2} = k:$$

dans le cas que nous examinons, k sera une quantité qui pourra avoir une valeur quelconque, puisque $\frac{gt^2}{4x}$ est supposée très-grande et du même ordre que $\frac{x}{l}$. Nous aurons

$$\frac{t\sqrt{g}}{2(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{l}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{lv}{x\sqrt{x}} + \text{etc.}\right),$$

$$\frac{gt^2}{4(x-\alpha)} = \frac{gt^2}{4x} + kv + \frac{klv^2}{x} + \text{etc.},$$

$$\frac{4}{gt^2} = \frac{l}{kx^2};$$

et si nous supposons la fraction $\frac{l}{x}$ assez petite pour qu'on puisse négliger tous les termes dont elle est facteur, l'équation précédente se réduira à

$$z' = \frac{h\sqrt{kl}}{\sqrt{2\pi x}}\cdot\left[\left(\cos.\frac{gt^2}{4x} + \sin.\frac{gt^2}{4x}\right)\cdot\int(1-v^2).\cos.kv.dv\right.$$
$$\left.+\left(\cos.\frac{gt^2}{4x} - \sin.\frac{gt^2}{4x}\right)\cdot\int(1-v^2).\sin.kv.dv\right];$$

les intégrales étant prises depuis $v = -1$ jusqu'à $v = 1$. Mais entre ces limites, l'intégrale $\int(1-v^2).\sin.kv.dv$ est nulle, parce qu'elle est la somme d'élémens deux à deux égaux et de signes contraires ; d'ailleurs, par les méthodes connues, on trouve

$$\int(1-v^2).\cos.kv.dv = \frac{4}{k^3}(\sin.k - k.\cos.k);$$

on aura donc enfin

$$z' = \frac{4h\sqrt{kl}}{k^3\sqrt{2\pi x}} \cdot (sin.\, k - k.\, cos.\, k)\left(cos.\frac{gt^2}{4x} + sin.\frac{gt^2}{4x}\right);$$

expression qui devient nulle, comme cela doit être, lorsque t et par suite k deviennent infinies.

Pour une valeur donnée de cette quantité k, l'ordonnée z' diminue à mesure que x augmente, mais seulement dans le rapport de $\sqrt{1}$ à $\sqrt{x}$; au contraire, la valeur de z' du n° 19 suivait la raison inverse de la distance x: il en résulte donc qu'à de grandes distances du lieu de l'ébranlement primitif, les ondes dont les lois sont comprises dans la nouvelle formule, seront beaucoup plus sensibles que celles que nous avons précédemment examinées. Ces nouvelles ondes sont, pour cette raison, celles qu'il importe le plus de considérer, et nous allons déterminer, dans le plus grand détail, les lois de leur propagation.

(22) Faisons, pour abréger,

$$\frac{4h\sqrt{kl}}{k^3\sqrt{2\pi x}} \cdot (sin.\, k - k.\, cos.\, k) = \mathrm{K}, \quad cos.\frac{gt^2}{4x} + sin.\frac{gt^2}{4x} = \mathrm{T};$$

nous aurons $\qquad z' = \mathrm{KT}.$

T est une fonction périodique, dont le *maximum* est égal à $\pm\sqrt{2}$ et a lieu quand $\frac{gt^2}{4x}$ est un multiple quelconque de π, augmenté de $\frac{\pi}{4}$. A cause que $\frac{gt^2}{4}$ est très-grande par rapport à x, cette fonction varie très-rapidement, et passe dans un temps très-court de son *maximum* positif à son *maximum* négatif: si l'on désigne ce temps par t', en négligeant t'^2, on aura

$$\frac{g(t+t')^2}{4x} - \frac{gt^2}{4x} = \frac{gtt'}{2x} = \pi;$$

et en ayant égard à ce que k représente, on en déduira

$$t' = \frac{\pi \sqrt{l}}{\sqrt{gk}}.$$

Pendant cet intervalle de temps, k et K ne varient pas sensiblement; on peut donc se représenter chaque point de la surface fluide, comme faisant, dans le sens vertical, des oscillations dont la durée t' et l'amplitude varient très-lentement par rapport à cette durée elle-même. Cette amplitude, c'est-à-dire la distance du point le plus élevé au point le plus bas de chaque oscillation, sera égale à $2\sqrt{2}\,K$; d'où il résulte, d'après la valeur de K, que les amplitudes des oscillations d'égales durées, seront réciproques aux racines quarrées des distances des points où elles se font, au lieu de l'ébranlement primitif.

La fonction T varie aussi très-rapidement par rapport à x; ses *maxima* positifs et négatifs se succèdent alternativement à de très-petits intervalles, dans toute l'étendue de la surface fluide : les uns répondent aux ondes tracées en relief, et les autres aux ondes tracées en creux sur cette surface; et la petite distance entre deux sommets consécutifs, peut être prise pour *largeur* de ces ondes. En la désignant par λ, et négligeant son quarré, on aura, pour la déterminer,

$$\frac{gt^2}{4x} - \frac{gt^2}{4(x+\lambda)} = \frac{gt^2\lambda}{4x^2} = \pi;$$

d'où l'on tire, à cause de ce que k représente,

$$\lambda = \frac{\pi l}{k}.$$

La largeur des ondes varie donc avec le temps dans le

même point, et d'un point à un autre dans le même insant; mais elle reste la même toutes les fois que la durée des oscillations l'est aussi; car t' et λ dépendent l'une et l'autre de la seule variable k. Si l'on veut comparer entre eux, ces deux élémens, on aura, en éliminant k entre les valeurs de λ et de t',

$$t'=\sqrt{\frac{\pi\lambda}{g}}:$$

ce qui montre que la durée des oscillations, en un point quelconque, est proportionnelle à la racine quarrée de la largeur des ondes au même point et au même instant.

Suivant Newton, cette durée devrait être la même que celle des oscillations d'un pendule simple, d'une longueur égale à la demi-largeur des ondes, ou, autrement dit, elle devrait être égale à $\pi\sqrt{\frac{\lambda}{2g}}$; ce qui surpasse la vraie valeur de t, dans le rapport de $\sqrt{\pi}$ à $\sqrt{2}$, ou de 1,2248 à l'unité.

(22) Lorsqu'on a $K=0$, l'amplitude des oscillations verticales est nulle; par conséquent les racines de cette équation détermineront, à chaque instant, sur la surface fluide, des points qui n'auront aucun mouvement vertical, et qu'on pourra regarder comme des espèces de *nœuds*, mobiles à cette surface : l'espace compris entre deux nœuds consécutifs forme un groupe d'ondes, que l'on peut anssi considérer comme une seule onde, *dentelée* dans toute son étendue, laquelle paraît se mouvoir à la surface, en s'élargissant à raison de la différence de vitesse des deux nœuds qui la terminent.

Pour chaque valeur réelle et positive de k, tirée de cette équation $K=0$, nous aurons

$$x=\frac{t\sqrt{gl}}{2\sqrt{k}};$$

d'où l'on voit que le mouvement de chaque nœud est uniforme, avec une vîtesse proportionnelle à la racine quarrée de l, ou à la racine quarrée de la largeur de l'ébranlement primitif.

L'équation K = o peut s'écrire ainsi :

$$tang.\ k - k = 0;$$

la détermination de k revient donc à trouver un arc égal à sa tangente; problème qu'Euler a résolu dans *l'introduction à l'analyse des infiniment petits.* Il existe un pareil arc dans chacun des quarts de cercle de rangs impairs; en rejetant l'arc zéro, qui appartient au premier quart, et se bornant à quatre décimales, on aura, d'après Euler,

$$k=\frac{(2n+1)\pi}{2}-\frac{0,6366}{2n+1}-\frac{0,1720}{(2n+1)^3}-\frac{0,0906}{(2n+1)^5}-\frac{0,0589}{(2n+1)^7};$$

n désignant un nombre entier et positif. Si l'on fait successivement $n=1, =2, =3$, on aura, pour les trois plus petites racines de notre équation,

$$k=4,4934,\quad k=7,7248,\quad k=11,0014;$$

et pour le mouvement des trois nœuds qui vont le plus vîte

$$x=(0,2359)\,t\sqrt{gl},$$
$$x=(0,1799)\,t\sqrt{gl},$$
$$x=(0,1507)\,t\sqrt{gl}.$$

(23) Si l'on veut connaître, à un instant donné, les points de la surface qui font les plus grandes oscillations verticales, on aura, pour les déterminer, l'équation $\frac{dK}{dx}=0$; en y mettant pour K, sa valeur; observant que $\frac{dk}{dx}=-\frac{2k}{x}$, et divisant tous ses termes par *cos.* k, elle devient

$$(4k^2-9)\, tang.\, k+9k=0. \qquad (18)$$

A la simple inspection de cette équation, on voit 1° que quand k surpasse $\frac{3}{2}$, elle ne peut avoir de racines réelles et positives, que dans les quarts de cercle de rangs pairs, pour lesquels les tangentes sont négatives; 2° qu'il y a effectivement une racine, et qu'il n'y en a qu'une, comprise dans chacun de ces quarts de cercle. Quant aux valeurs de k, comprise entre zéro et $\frac{3}{2}$, on s'assurera, par des substitutions, qu'elles ne peuvent fournir aucune racine de cette équation.

Relativement à chacune de ses racines, on aura

$$x=\frac{t\sqrt{gl}}{2\sqrt{k}};$$

ce qui montre que les points de la surface, qui répondent aux *maxima* des oscillations, se meuvent, comme les nœuds qu'on vient de considérer, uniformément et avec une vîtesse proportionnelle à $\sqrt{l}$. La plus petite de ces racines étant moindre que la plus petite valeur de k du numéro précédent, il s'en suit que le premier *maximum* précède le premier nœud; ensuite il a y un *maximum* compris entre le

premier et le second nœud; un autre, entre le second et le troisième, et généralement, un *maximum* pour chaque onde dentelée. C'est à ces *maxima* qu'il est naturel de rapporter le mouvement de cette espèce d'ondes; ainsi par vîtesse d'une onde dentelée, nous entendrons la vîtesse apparente du point de cette onde qui répond aux plus grandes oscillations verticales.

Il est aisé de comparer entre elles les amplitudes de ces oscillations *maxima;* car on peut tirer de l'équation (18), les valeurs de *sin.* k et *cos.* k, en fonctions de k, et les substituant, ainsi que la valeur de x, dans celle de l'amplitude $2\sqrt{2}\,K$, que nous représenterons par K', on trouve

$$K' = \frac{324}{\sqrt{\pi}} \sqrt[4]{\frac{4l}{gt^2}} \cdot \frac{k^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{(4k^2-9)^2+81k^2}}.$$

Or, cette fonction de k croît depuis $k=0$ jusqu'à une certaine valeur de k, comprise entre les deux plus petites racines de l'équation (18); puis elle décroît indéfiniment à mesure que k augmente; il s'en suit donc que les deux premiers *maxima* sont plus grands que tous les autres, et que ceux-ci forment à la surface fluide, une suite décroissante dans le sens où ils se rapprochent de l'origine des ondes.

(24) Déterminons maintenant les racines réelles et positives de l'équation (18). Pour avoir la plus petite de toutes, qui appartient au second quart de cercle, je fais $k=\frac{\pi}{2}+s$; l'équation devient

$$\big((\pi+2s)^2-9\big)\,\textit{cot.}\,s-\frac{9}{2}(\pi+2s)=0.$$

Par des substitutions successives, on reconnaît que la valeur

de s, qu'il s'agit de trouver, est comprise entre 15 et 16 degrés sexagésimaux ; si l'on fait conséquemment $s = \frac{\pi}{12} + y$, et qu'on néglige le quarré de y, on trouve $y = 0{,}002589$; donc, à cause de $\pi = 3{,}14159$, on aura, en ne conservant que quatre décimales,

$$k = 1{,}8353 ;$$

et pour le mouvement de la première onde, correspondant à cette racine,

$$x = (0{,}3691)\, t \sqrt{gl}.$$

On aura aussi pour la valeur de K', relative à la même racine,

$$K' = (2{,}3527)\, h \sqrt[4]{\frac{l}{gt^2}},$$

ou bien, en l'exprimant en fonction de x,

$$K' = (1{,}4293)\, h \sqrt{\frac{x}{l}}.$$

Si l'on veut aussi connaître la largeur de la *dent* de l'onde, et la durée de l'oscillation qui répondent à cette amplitude *maxima*, c'est-à-dire, les valeurs des quantités que nous avons désignées précédemment par λ et t', on aura

$$\lambda = (1{,}7118)\, l, \quad t' = (2{,}3191) \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

La seconde racine de l'équation (18) tombant dans le quatrième quart de cercle, je fais, pour l'obtenir, $k = 2\pi - s$, ce qui change cette équation en

$$\left(4(2\pi - s) - 9\right) \tang. s - 9(2\pi - s) = 0.$$

Par des essais, on trouve la valeur de s comprise entre 22° et 23°; faisant donc $s = 22° + y$, et calculant la valeur de y en négligeant son quarré, on obtient $y = 0,003448$; d'où il résulte, pour la seconde racine,

$$k = 5,8958\,;$$

et, pour le mouvement de la deuxième onde,

$$x = (0,2059)\,t\sqrt{gl}.$$

La valeur correspondante de K' sera

$$K' = (0,6878)\,h\sqrt{\frac{l}{gt^2}},\ \text{ou}\ K' = (0,3121)\,h\sqrt{\frac{l}{x}}\,;$$

en sorte qu'à un instant donné, l'amplitude K', qui se rapporte à la deuxième onde, n'est pas le tiers de celle qui appartient à la première, et, pour une même valeur de x, elle en est à peine le cinquième. Les valeurs de λ et t', relatives à cette seconde racine, sont

$$\lambda = (0,5331)\,l, \quad t' = 1,2938)\sqrt{gl}.$$

On déterminera d'une manière très-simple, et avec une approximation très-suffisante, les racines de l'équation (18), à partir de la troisième, en faisant $k = i\pi - s$, et négligeant le quarré de s : cette équation donne alors $s = \frac{9}{4i\pi}$; de sorte qu'on a

$$k = i\pi - \frac{9}{4i\pi}\,;$$

où l'on devra prendre successivement pour i, tous les nombres entiers plus grands que 2. Pour $i = 3$, on a $k = 9,1861$;

valeur qui ne diffère pas d'un dix millième de la troisième racine. Les valeurs correspondantes de x, K', λ et t', sont

$$x=(0,1649)\,t\sqrt{gl},\quad K'=(0,4032)h\sqrt[4]{\frac{l}{gt^2}},$$
$$\lambda=(0,3420)\,l\qquad t'=(1,0364)\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

En prenant $i=4$, il vient $k=12,3872$, et par suite

$$x=(0,1421)\,t\sqrt{gl},\quad K'=(0,2741)\sqrt[4]{\frac{l}{gt^2}},$$
$$\lambda=(0,2536)\,l,\qquad t'=(0,8926)\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Nous ne continuerons pas plus loin ces calculs ; mais pour donner un exemple de leur application, nous supposerons que la largeur de l'ébranlement primitif ait été d'un décimètre, ensorte qu'on ait $l=0^m,05$. En prenant pour unité de temps la seconde sexagésimale, on aura $g=9^m,8088$; au moyen de quoi l'on trouve, en rangeant sur une même ligne ce qui se rapporte à une même onde :

$$x=(0^m,2587)t,\quad K'=(0,6286)\frac{h}{\sqrt{t}},\quad \lambda=0^m,0856,\quad t'=0'',1658;$$

$$x=(0^m,1442)t,\quad K'=(0,1839)\frac{h}{\sqrt{t}},\quad \lambda=0^m,0268,\quad t'=0'',0924;$$

$$x=(0^m,1155)t,\quad K'=(0,1077)\frac{h}{\sqrt{t}},\quad \lambda=0^m,0172,\quad t'=0'',0740;$$

$$x=(0^m,0995)t,\quad K'=(0,0733)\frac{h}{\sqrt{t}},\quad \lambda=0^m,0126,\quad t'=0'',0638.$$

§ IV.

Propagation du mouvement dans le sens de la profondeur du fluide, abstraction faite, comme précédemment, de l'une des dimensions horizontales.

(25) Pour simplifier la question, nous nous bornerons à considérer les molécules situées au-dessous de l'ébranlement primitif, à une profondeur très-grande par rapport à la largeur de cet ébranlement. Quelle que soit la forme du corps dont l'immersion a produit les ondes, s'il est symétrique par rapport à un axe vertical, et qu'on prenne cette droite pour axe des z, les molécules situées sur cet axe n'auront aucune vîtesse horizontale; ainsi, en supposant la symétrie du segment plongé, nous aurons seulement à examiner les lois des vîtesses dans le sens vertical, ou les valeurs de $\frac{d\varphi}{dz}$. Or, en faisant $x = 0$ dans l'équation (11) du n° 10, et négligeaut α relativement à z, on a

$$\varphi = \frac{gt}{\pi z} \cdot \iint f\alpha . e^{-\frac{gt^2(1-v^2)}{4z}} \cos . \frac{gt^2\alpha(1-v^2)}{4z^2} dv\, d\alpha;$$

remplaçant de plus le cosinus compris sous cette double intégrale par l'unité, et faisant $\int f\alpha\, d\alpha = A$, de manière que A représente l'aire du segment plongé, il vient

$$\varphi = \frac{Agt}{\pi z} e^{-\frac{gt^2}{4z}} \int e^{\frac{gt^2v^2}{4z}} dv;$$

l'intégrale étant prise depuis $v = 0$ jusqu'à $v = 1$. Cepen-

dant il faut observer que cette réduction du cosinus à l'unité, ne serait plus permise si le rapport $\frac{gt^2}{4z}$ était devenu très-grand et du même ordre que $\frac{z}{\alpha}$, en sorte que le produit $\frac{gt^2}{4z}\cdot\frac{\alpha}{z}$ fût une quantité finie qui pût avoir une valeur quelconque; mais alors on tomberait dans le cas des vîtesses finales que nous avons considérées dans le n° 13, et sur lesquelles il ne nous reste rien à dire : ce cas étant donc exclu, on pourra, sans crainte d'erreur, employer cette dernière valeur de φ à la détermination des vîtesses que nous voulons examiner.

(26) En faisant, pour abréger,

$$\frac{gt^2}{4z}=q,$$

cette expression devient

$$\varphi=\frac{2A\sqrt{gq}}{\pi\sqrt{z}}\,e^{-q}\int e^{qv^2}dv;$$

et si l'on observe que $\frac{dq}{dz}=-\frac{q}{z}$, on en déduit

$$\frac{d\varphi}{dz}=-\frac{2A\sqrt{gq}}{\pi z\sqrt{z}}\,e^{-q}\left(\int e^{qv^2}qv^2dv+(1-q)\int e^{qv^2}dv\right);$$

mais en ayant égard aux limites $v=0$ et $v=1$, l'intégration par parties donne

$$\int e^{qv^2}qv^2dv=\tfrac{1}{2}e^{q}-\tfrac{1}{2}\int e^{qv^2}dv;$$

d'où il résulte

$$\frac{d\varphi}{dz}=-\frac{A\sqrt{gq}}{\pi z\sqrt{z}}\left(1+(1-2q)\,e^{-q}\int e^{qv^2}dv\right).$$

Si l'on veut connaître, pour un point donné, l'instant où cette vîtesse atteint son *maximum*, il faut égaler à zéro la différentielle de sa valeur prise par rapport à t; et comme on a $\frac{dq}{dt}=\frac{2q}{t}$, on aura

$$1+(1-8q+4q^2)e^{-q}\int e^{qv^2}dv+2(1-2q)e^{-q}\int e^{qv^2}qv^2dv=0,$$

ou bien, en intégrant par parties,

$$1-q-(3q-2q^2)e^{-q}\int e^{qv^2}dv=0.$$

Je tire de-là la valeur de $e^{-q}\int e^{qv^2}dv$; je la substitue dans celle de $\frac{d\varphi}{dz}$, et désignant par V, la vîtesse *maxima*, il vient

$$V=-\frac{A\sqrt{g}}{\pi z\sqrt{z}(3-2q)\sqrt{q}};$$

où l'on voit que cette vîtesse sera proportionnelle à l'aire du segment plongé, et décroîtra suivant la puissance $\frac{3}{2}$ de la profondeur z. Comme on a d'ailleurs $z=\frac{gt^2}{4q}$, on voit aussi que la vîtesse *maxima* se propagera d'un mouvement uniformément accéléré, avec une accélération qui sera, à celle des corps pesans, comme l'unité est au double de la quantité q. Il ne reste donc plus qu'à déterminer numériquement cette quantité, au moyen de l'équation précédente; mais on y parviendra plus simplement en partant d'une valeur en série de la fonction φ.

(27) En réduisant en série, et intégrant depuis $v=0$, jusqu'à $v=1$, il vient

$$\int e^{qv^2}dv = 1 + \frac{q}{3} + \frac{q^2}{2.5} + \frac{q^3}{2.3.7} + \frac{q^4}{2.3.4.9} + \ldots + \frac{q^n}{2.3\ldots n.2n+1} + \text{etc.};$$

par conséquent

$$\varphi = \frac{Agt}{\pi z}e^{-q}\left(1 + \frac{q}{3} + \frac{q^2}{2.5} + \frac{q^3}{2.3.7} + \frac{q^4}{2.3.4.9} + \ldots + \frac{q^n}{2.3\ldots n.2n+1} + \text{etc.}\right);$$

d'où l'on déduira facilement

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{Agt}{\pi z^2}e^{-q}\left(1 - \frac{q}{3} - \frac{q^2}{2.3.5} - \frac{q^3}{2.3.5.7} - \frac{q^4}{2.3.4.7.9} - \ldots - \frac{q^n}{2.3\ldots n.2n-1.2n+1} - \text{etc.}\right);$$

égalant à zéro la différentielle de cette quantité, prise par rapport à t, et supprimant les facteurs $\frac{3Ag}{\pi z^2}$, et e^{-q}, communs à tous les termes, on trouve

$$\frac{1}{3} - q + \frac{q^2}{2.3} + \frac{q^3}{2.3.3.5} + \frac{q^4}{2.3.4.5.7} + \ldots + \frac{q^n}{2.3\ldots n.2n-3.2n-1} + \text{etc.} = 0.$$

Or, le second terme de cette équation étant seul négatif, il est évident qu'elle ne peut avoir que deux racines réelles et positives. La plus petite est comprise entre zéro et l'unité; et par la méthode ordinaire, on trouve, pour sa valeur approchée, $q = 0{,}3551$; d'où il résulte, pour le premier *maximum* de vîtesse,

$$V = -(0{,}2328)\frac{A\sqrt{g}}{z\sqrt{z}}.$$

La valeur approchée de la seconde racine est $q = 3{,}8247$, et l'on a, pour la vîtesse qui lui correspond,

$$V = (0{,}0441)\,\frac{A\sqrt{g}}{z\sqrt{z}}.$$

Entre ces deux vîtesses, qui sont de signes contraires, il existe une vîtesse nulle; elle répond à la valeur de q donnée par l'équation $\frac{dq}{dz} = 0$, ou

$$1 - \frac{q}{3} - \frac{q^2}{2.3.5} - \frac{q^3}{2.3.5.7} - \frac{q^4}{2.3.4.7.9} - \text{etc.} = 0,$$

qui n'a qu'une seule racine réelle et positive, pour laquelle on trouve $q = 2{,}3926$. Comme on a généralement $t = 2\sqrt{\frac{qz}{g}}$, il s'ensuit que les temps correspondans à ces vîtesses négative, nulle et positive, seront

$$t = (1{,}1918)\sqrt{\frac{z}{g}}, \quad t = (3{,}0936)\sqrt{\frac{z}{g}}, \quad t = (3{,}8114)\sqrt{\frac{z}{g}}.$$

Ainsi, depuis l'origine du mouvement jusqu'à l'instant de la vîtesse nulle, les molécules situées dans l'axe des z, ont des vîtesses négatives, ce qui signifie qu'elles s'élèvent; leurs vîtesses deviennent ensuite positives; ces molécules s'abaissent jusqu'à la fin du mouvement; et leurs vîtesses finales doivent être aussi positives, ainsi que nous l'avons trouvé dans le nº 13.

(28) On peut déterminer l'excursion verticale de chaque molécule, pendant tout le temps de son élévation : en la désignant par s, et observant que $dt = \sqrt{\frac{z}{gq}}\cdot dq$, on aura

$$s = -\int \frac{d\varphi}{dz}\, dt = -\int \frac{d\varphi}{dz} \cdot \sqrt{\frac{z}{gq}} \cdot dq;$$

l'intégrale étant prise depuis $q = 0$, jusqu'à $q = 2,3926$. Mais pour obtenir commodément la valeur numérique de s, il faut employer un développement de $\frac{d\varphi}{dz}$ qui ne renferme pas l'exponentielle e^{-q}, contenu dans le précédent.

Reprenons donc la valeur de φ, sous forme finie, que nous pouvons écrire ainsi :

$$\varphi = \frac{Agt}{\pi z}\int e^{-q(1-v^2)}\, dv;$$

développant l'exponentielle, et intégrant ensuite depuis $v = 0$ jusqu'à $v = 1$, comme dans le n° 11, il vient

$$\varphi = \frac{Agt}{\pi z}\left(1 - \frac{2q}{1.3} + \frac{(2q)^2}{1.3.5} - \frac{(2q)^3}{1.3.5.7} + \frac{(2q)^4}{1.3.5.7.9} - \text{etc.}\right);$$

donc, à cause de $\frac{dq}{dz} = -\frac{q}{z}$, on aura

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{Agt}{\pi z^2}\left(1 - \frac{2(2q)}{1.3} + \frac{3(2q)^2}{1.3.5} - \frac{4(2q)^3}{1.3.5.7} + \frac{5(2q)^4}{1.3.5.7.9} - \text{etc.}\right);$$

et à cause de $t = 2\sqrt{\frac{qz}{g}}$, on en conclura

$$s = \frac{A}{\pi z}\left(2q - \frac{(2q)^2}{1.3} + \frac{(2q)^3}{1.3.5} - \frac{(2q)^4}{1.3.5.7} + \frac{(2q)^5}{1.3.5.7.9} - \text{etc.}\right) + const.$$

La constante arbitraire est nulle, puisque l'intégrale doit

s'évanouir quand $q=0$; faisant de plus $q=2,3926$, on trouve

$$s=(0,4382)\frac{A}{z}.$$

(29) Les excursions verticales des molécules situées au-dessous de l'ébranlement primitif, suivent comme on voit la raison inverse de la profondeur z; et leurs vîtesses, à l'instant du *maximum*, diminuent suivant la puissance $\frac{3}{2}$ de cette qantité. Ces décroissemens sont assez peu rapides pour que le mouvement du fluide, soit encore très-sensible à de très-grandes profondeurs; et c'est un résultat d'autant plus remarquable, qu'il n'en serait plus de même si l'ébranlement primitif avait eu lieu dans toute l'étendue de la surface, au lieu d'avoir été circonscrit dans un endroit déterminé.

En effet supposons, par exemple, qu'on ait donné primitivement à la surface, dans toute sa longueur, la forme d'une courbe serpentante comprise dans cette équation :

$$z'=k\cos.\frac{\pi x}{2l},$$

k et l étant des constantes données. Supposons aussi, pour simplifier, qu'on n'ait imprimé au fluide aucune vîtesse initiale. Pour appliquer à ce cas l'équation (8) du n° 4, il suffira de prendre un seul terme de la première des deux séries que renferme la valeur de φ; on aura donc

$$\varphi=B\left(e^{a(h-z)}+e^{-a(h-z)}\right)\cos.(ax+a').\sin.ct;.$$

différenciant par rapport à t, et faisant $z=0$, $t=0$, afin d'avoir l'équation de la surface (n° 1), il vient

$$z' = \frac{Bc}{g}\left(e^{ah} + e^{-ah}\right) \cdot \cos.(ax + a');$$

et, pour la faire coïncider avec l'équation donnée, on fera

$$a' = 0, \quad a = \frac{\pi}{2l}, \quad B = \frac{gk}{\left(e^{ah} + e^{-ah}\right)c};$$

par conséquent on aura

$$\varphi = \frac{e^{a(h-z)} + e^{-a(h-z)}}{e^{ah} + e^{-ah}} \cdot \frac{gk}{c} \cdot \cos. \frac{\pi x}{2l} \cdot \sin. ct.$$

Maintenant, si l'on suppose infinie la profondeur h du fluide, la valeur de c se réduit à $c = \sqrt{ag} = \sqrt{\frac{\pi g}{2l}}$, comme dans le n° 8, et celle de φ devient

$$\varphi = k\sqrt{\frac{2lg}{\pi}} \cdot e^{-\frac{\pi z}{2l}} \cos. \frac{\pi x}{2l} \cdot \sin. t\sqrt{\frac{\pi g}{2l}}.$$

On en déduit, pour les vitesses verticale et horizontale du fluide, en un point et en un instant quelconques,

$$\frac{d\varphi}{dz} = -k\sqrt{\frac{\pi g}{2l}} \cdot e^{-\frac{\pi z}{2l}} \cos. \frac{\pi x}{2l} \cdot \sin. t\sqrt{\frac{\pi g}{2l}},$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -k\sqrt{\frac{\pi g}{2l}} \cdot e^{-\frac{\pi z}{2l}} \sin. \frac{\pi x}{2l} \cdot \sin. t\sqrt{\frac{\pi g}{2l}},$$

où l'on voit que, par rapport à la profondeur z, la loi de ces vitesses est exprimée par une exponentielle ; en sorte qu'elles décroissent en progression géométrique, quand z croît en progression arithmétique. Or, il résulte d'un tel décroisssement qu'à de grandes profondeurs, relativement

à la quantité $2l$, ces vîtesses seront très-affaiblies, et incomparablement moindres que dans le cas d'un ébranlement partiel.

Au reste, cet ébranlement de la surface dans toute son étendue, peut être regardé comme une suite d'ébranlemens partiels dont la largeur commune serait $2l$, et dont les uns résulteraient d'une élévation de la surface, et les autres d'un abaissement : ces ébranlemens partiels produisent dans la masse fluide, des vîtesses de signes contraires; et le calcul montre qu'elles se détruisent à très-peu-près quand la profondeur z est un multiple de $2l$, qui n'a pas même besoin d'être très-élevé. C'est de cette manière qu'on peut concevoir la différence essentielle que nous remarquons entre le cas d'un ébranlement partiel, et celui d'un ébranlement qui s'étend à la surface entière.

§. V.

Intégration des équations du § Ier, *dans le cas où l'on considère les trois dimensions du fluide.*

(30) Les équations différentielles du problème se résolvent, dans ce cas, en suivant la même marche que dans celui où le fluide était réduit à deux dimensions. Ainsi, nous satisferons d'abord à l'équation (2) du n° 1, par une série de cette forme :

$$\varphi=\Sigma\left(\mathrm{A}e^{-z\sqrt{a^2+b^2}}+\mathrm{A}'e^{z\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cos.(ax+\alpha').\cos.(by+b');$$

A, A', a, a', b, b', étant des quantités indépendantes de x, y, z, et le signe Σ désignant une somme qui s'étend à toutes

les valeurs possibles de ces six quantités. D'après l'équation $\frac{d\varphi}{dz}=0$ du nº 2, qui a lieu pour $z=h$, cette valeur de φ se changera en

$$\varphi=\Sigma T\left(e^{(h-z)\sqrt{a^2+b^2}}+e^{-(h-z)\sqrt{a^2+b^2}}\right)cos.(ax+a').cos.(by+b);$$

et pour satisfaire en outre à l'équation (4) du même numéro, qui se rapporte à la surface, ou à $z=0$, il faudra déterminer T par l'équation

$$\frac{d^2T}{dt^2}+c^2T=0,$$

dans laquelle on fait, pour abréger,

$$\frac{\left(e^{h\sqrt{a^2+b^2}}-e^{-h\sqrt{a^2+b^2}}\right)g\sqrt{a^2+b^2}}{e^{h\sqrt{a^2+b^2}}+e^{-h\sqrt{a^2+b^2}}}=c^2.$$

On en tire, en intégrant,

$$T=B.sin.ct+B'.cos.ct;$$

B et B' étant les deux constantes arbitraires. Je substitue cette valeur de T, dans celle de φ; il vient

$$\varphi=\Sigma B\left(e^{(h-z)\sqrt{a^2+b^2}}\right.$$
$$\left.+e^{-(h-z)\sqrt{a^2+b^2}}\right).cos.(ax+a').cos.(by+b')sin.ct:$$

pour simplifier, j'ai supprimé le terme renfermant *cos. ct*, parce qu'il se rapporterait aux vîtesses initiales du fluide; vîtesses que nous continuerons de supposer nulles, comme nous l'avons fait dans le cas précédent (nº 9).

Maintenant soit

$$z' = f(x, y),$$

l'équation de la surface du fluide à l'origine du mouvement; d'après l'équation (3) du n° 1, l'ordonnée z' de cette surface, déduite de notre valeur de φ, et correspondante à $t = 0$, sera

$$z' = \Sigma \frac{Bc}{g} \left(e^{h\sqrt{a^2+b^2}} + e^{-h\sqrt{a^2+b^2}}\right) \cos.(ax + a').\cos.(by + b');$$

et pour la faire coïncider avec la valeur donnée, il faut, suivant le théorême général du n° 5, prendre

$$a' = -a\alpha, \quad b' = -b\beta,$$

$$B = \frac{f(\alpha, \beta)\, e^{-ka}\, e^{-k'b}\, g\, da\, db\, d\alpha\, d\beta}{\left(e^{h\sqrt{a^2+b^2}} + e^{-h\sqrt{a^2+b^2}}\right)\pi^2 c},$$

et changer le signe Σ en celui d'une intégrale quadruple, relative à a, b, α, β. Substituant ces valeurs, dans celle de φ, et supprimant les exposans infiniment petits ka et $k'b$, par rapport aux exposans $(h-z)\sqrt{a^2+b^2}$, et $(z-h)\sqrt{a^2+b^2}$, auxquels ils devraient être ajoutés, nous aurons enfin

$$\varphi = \frac{g}{\pi^2} \iiiint f(\alpha, \beta)\, P \cos.(ax - a\alpha).\cos.(by - b\beta).\frac{\sin.ct}{c}\, da\, db\, d\alpha\, d\beta;$$

en faisant pour abréger

$$\left[\frac{e^{(h-z)\sqrt{a^2+b^2}} + e^{-(h-z)\sqrt{a^2+b^2}}}{e^{h\sqrt{a^2+b^2}} + e^{-h\sqrt{a^2+b^2}}}\right] = P;$$

et l'intégrale étant prise depuis $\alpha = -\frac{1}{0}$ et $\beta = -\frac{1}{0}$, jusqu'à $a = +\frac{1}{0}$ et $\beta = +\frac{1}{0}$, et depuis $a = 0$ et $b = 0$, jusqu'à $a = \frac{1}{0}$ et $b = \frac{1}{0}$.

(31) Cette valeur de φ, qui ne contient plus rien d'inconnu, renferme la solution complète du problème qui nous occupe; car au moyen de ses différences partielles relatives à t, x, y, z, on déterminera, pour un instant quelconque, la figure de la surface et les vîtesses horizontale et verticale de tel point qu'on voudra de la masse fluide. On y pourrait donner à la profondeur h, de cette masse, une grandeur quelconque; mais nous nous bornerons à considérer le cas où h est regardée comme infinie; cas dans lequel les valeurs de P et de c se réduisent à

$$P = e^{-z\sqrt{a^2+b^2}}, \quad c = \sqrt{g}\sqrt[4]{a^2+b^2}.$$

Aux variables a et b, nous allons substituer des variables u et ω, qui nous seront plus commodes, et que nous supposerons telles qu'on ait

$$a = u.\cos.\omega, \quad b = u.\sin.\omega;$$

ce qui donne

$$P = e^{-zu}, \quad c = \sqrt{gu}.$$

Par les règles connues de la transformation des intégrales multiples, on aura en même temps,

$$da\,db = u\,du\,d\omega;$$

et il est aisé de voir que l'intégration qui devait se faire de-

puis $a=0$ et $b=0$, jusqu'à $u=\frac{1}{0}$ et $b=\frac{1}{0}$, devra avoir lieu maintenant depuis $u=0$, jusqu'à $a=\frac{1}{0}$, et depuis $\omega=0$, jusqu'à $\omega=\frac{\pi}{2}$. Soit de plus

$$x-\alpha=\rho.\cos.\theta, \quad y-\beta=\rho.\sin.\theta;$$

nous aurons

$$\varphi=\frac{\sqrt{g}}{2\pi^2}\iiiint f(\alpha,\beta)e^{-zu}\Big[\cos.\big(u\rho.\cos.(\omega-\theta)\big)$$
$$+\cos.\big(u\rho.\cos.(\omega+\theta)\big)\Big]\cdot\sin.(t\sqrt{gu}).\sqrt{u}\,du\,d\omega\,d\alpha\,d\beta.$$

Or, il est aisé de prouver que cette expression est indépendante de l'angle θ que l'intégration relative à ω fait disparaître.

En effet soit, pour un moment,

$$\int\Big[\cos.\big(u\rho.\cos.(\omega-\theta)\big)+\cos.\big(u\rho.\cos.(\omega+\theta)\big)\Big]\,d\omega=\mathrm{U};$$

en différenciant d'abord par rapport à θ, et effectuant ensuite l'intégration relative à ω, on aura

$$\frac{d\mathrm{U}}{d\theta}=-\cos.\big(u\rho.\cos.(\omega-\theta)\big)+\cos.\big(u\rho.\cos.(\omega+\theta)\big);$$

quantité qui devient nulle aux deux limites $\omega=0$, et $\omega=\frac{\pi}{2}$: par conséquent l'intégrale U, prise entre ces limites, et par suite la valeur de φ, sont indépendantes de θ.

Il sera donc permis de faire $\theta=0$ dans la valeur de φ; ce qui la réduit à

18.

$$\varphi = \frac{\sqrt{g}}{\pi^2} \iiiint f(\alpha, \beta) e^{-zu} . \cos.(u\rho.\cos.\omega). \sin.(t\sqrt{gu}). \sqrt{u}\, du\, d\omega\, d\alpha\, d\beta. \qquad (a)$$

(32) On peut effectivement vérifier que cette expression satisfait encore à l'équation (1); car si l'on fait

$$\int e^{-zu} \cos.(\rho.\cos.\omega)\, d\omega = \mathrm{R},$$

il est évident que cette vérification reviendra à faire voir que

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{dz^2} + \frac{d^2\mathrm{R}}{dy^2} + \frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2} = 0.$$

Or, on a

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{dz^2} = u^2 \int e^{-zu} \cos.(u\rho.\cos.\omega)\, d\omega,$$

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{dy^2} = -u^2 \frac{d\rho^2}{dy^2} . \int e^{-zu} \cos.(u\rho.\cos.\omega) \cos.^2\omega . d\omega$$

$$- u \frac{d^2\rho}{dy^2} . \int e^{-zu} \sin.(u\rho.\cos.\omega) \cos.\omega . d\omega,$$

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2} = -u^2 \frac{d\rho^2}{dx^2} . \int e^{-zu} \cos.(u\rho.\cos.\omega) \cos.^2\omega . d\omega$$

$$- u \frac{d^2\rho}{dx^2} . \int e^{-zu} \cos.(u\rho.\cos.\omega) \cos.\omega . d\omega;$$

de plus la valeur de ρ est

$$\rho = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2};$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\rho^2}{dy^2} + \frac{d\rho^2}{dx^2} = 1, \quad \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dx^2} = \frac{1}{\rho};$$

on aura donc, en faisant la somme des trois équations précédentes, et réduisant

$$\frac{d^2R}{dz^2}+\frac{d^2R}{dy^2}+\frac{d^2R}{dx^2}=u^2\int e^{-zu}.\cos.(u\rho.\cos.\omega).\sin.^2\omega.d\omega$$
$$-\frac{u}{\rho}.\int e^{-zu}.\sin.(u\rho.\cos.\omega).\cos.\omega.d\omega;$$

et comme on a identiquement

$$u^2.\cos.(u\rho.\cos.\omega).\sin^2.\omega.d\omega-\frac{u}{\rho}.(\sin.(u\rho.\cos.\omega).\cos.\omega.d\omega$$
$$=-\frac{u}{\rho}.d\Big(\sin.(u\rho.\cos.\omega).\sin.\omega\Big),$$

il s'ensuit que le second membre de la dernière équation peut s'intégrer; ce qui donne

$$\frac{d^2R}{dz^2}+\frac{d^2R}{dy^2}+\frac{d^2R}{dx^2}=-\frac{u}{\rho}.\sin.(u\rho.\cos.\omega).\sin.\omega;$$

quantité qui est, en effet, nulle aux deux limites $\omega=0$ et $\omega=\frac{\pi}{2}$.

(33) Avant de s'engager plus avant dans une analyse assez épineuse, il n'est pas non plus inutile de vérifier que l'équation (a) redonne pour l'ordonnée z' qui répond à $t=0$, la valeur $z'=f(x,y)$ d'où l'on est parti.

On en déduit, pour cette ordonnée,

$$z'=\frac{1}{\pi^2}\iiiint f(\alpha,\beta)e^{-zu}.\cos.(u\rho.\cos.\omega).u\,du\,d\omega\,d\alpha\,d\beta;$$

expression dans laquelle il faudra faire $z=0$, après l'intégration effectuée. Soit

$$\iint e^{-zu}\cos.(u\rho.\cos.\omega).du\,d\omega=Z;$$

intégrant, par rapport à u, depuis $u=0$ jusqu'à $u=\frac{1}{0}$, on aura

$$\int \frac{z\,d\omega}{z^2+\rho^2.\,cos.^2\,\omega}=\mathrm{Z}\,;$$

ou bien, en faisant *tang.* $\omega=v$, et intégrant par rapport à v,

$$\int \frac{z\,dv}{z^2+\rho^2+z^2v^2}=\frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\cdot arc\left(tang.=\frac{z\,v}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\right)=\mathrm{Z}\,;$$

donc, à cause que les limites relatives à v, qui répondent aux limites $\omega=0$ et $\omega=\frac{\pi}{2}$, sont $v=0$ et $v=\frac{1}{0}$, on aura simplement

$$\mathrm{Z}=\frac{\pi}{2\sqrt{z^2+\rho^2}}.$$

Remettant pour Z, l'intégrale double que cette lettre représente, et différenciant ensuite par rapport à z, on en conclut

$$\iint e^{-zu}.\,cos.\,(u\rho\,.\,cos.\,\omega).\,u\,du\,d\omega=\frac{\pi z}{2(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\,;$$

et par conséquent

$$z'=\frac{1}{2\pi}\cdot\iint f(\alpha,\beta)\,\frac{z\,d\alpha\,d\beta}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, si l'on conçoit que la variable z devienne infiniment petite, il est évident que la quantité comprise sous le double signe intégral, sera aussi infiniment petite ou nulle, à moins que ρ ne soit une quantité du même ordre que z; ce qui exige, d'après la valeur de ρ, que les variables α et β diffèrent infiniment peu de x et y; faisant donc

$$\alpha=x+\alpha',\quad \beta=y+\beta',\quad \rho^2=\alpha'^2+\beta'^2,$$

nous aurons

$$z' = \frac{1}{2\pi} \iint f(x+\alpha', y+6') \frac{z\, d\alpha'\, d6'}{(z^2+\alpha'^2+6'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

et il suffira d'étendre cette double intégrale à des valeurs positives ou négatives, mais infiniment petites, de α' et $6'$. Entre ces limites, la fonction désignée par f pourra être regardée comme constante et égale à $f(x, y)$; en la faisant passer hors du signe intégral, on aura donc

$$z' = \frac{1}{2\pi} f(x, y) \iint \frac{z\, d\alpha'\, d6'}{(z^2+\alpha'^2+6'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

mais comme la quantité qui reste à intégrer devient infiniment petite ou nulle, en même temps que z, pour toutes les valeurs possibles de α' et $6'$, qui ne sont pas elles-mêmes infiniment petites, il s'ensuit que rien ne peut empêcher de donner de nouveau, pour limites à l'intégrale, $\alpha' = -\frac{1}{0}$ et $6' = -\frac{1}{0}$, $\alpha' = +\frac{1}{0}$ et $6' = +\frac{1}{0}$.

Pour intégrer entre ces limites, je fais

$$6' = \gamma \sqrt{z^2+\alpha'^2};$$

γ étant une nouvelle variable dont les valeurs extrêmes seront $\pm \frac{1}{0}$. Nous aurons $d6' = d\gamma \sqrt{z^2+\alpha'^2}$, et

$$z' = \frac{1}{2\pi} f(x, y) \int \frac{z\, d\alpha'}{z^2+\alpha'^2} \cdot \int \frac{d\gamma}{(1+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}};$$

intégrant depuis $\alpha' = -\frac{1}{0}$ jusqu'à $\alpha' = +\frac{1}{0}$, et de même depuis $\gamma = -\frac{1}{0}$ jusqu'à $\gamma = +\frac{1}{0}$, il vient

$$\int \frac{z\,d\alpha'}{z^2+\alpha'^2} = arc\left(tang. = \frac{\alpha'}{z}\right) = \pi,$$

$$\int \frac{d\gamma}{(1+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} = 2:$$

on aura donc finalement

$$z' = f(x, y);$$

ce qu'il s'agissait en effet de vérifier.

(34) Reprenons maintenant l'équation (a), et développons son second membre suivant les puissances de t.

Nous avons

$$\sqrt{u}.\,sin.\,t\sqrt{gu} = ut\sqrt{g} - \frac{u^2(t\sqrt{g})^3}{2.3} + \frac{u^3(t\sqrt{g})^5}{2.3.4.5} - \text{etc.};$$

en convenant donc de représenter par Z, la même intégrale double que dans le numéro précédent, on aura généralement

$$\iint e^{-uz} cos.(u\rho.\,cos.\,\omega).u^n\,du\,d\omega = (-1)^n \frac{d^nZ}{dz^n};$$

et l'équation (a) deviendra

$$\varphi = -\frac{gt}{\pi^2}\iint\left(\frac{dZ}{dz} + \frac{gt^2}{2.3}\cdot\frac{d^2Z}{dz^2} + \frac{g^2t^4}{2.3.4.5}\cdot\frac{d^3Z}{dz^3}\right.$$
$$\left. + \frac{g^3t^6}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{d^4Z}{dz^4} + \text{etc.}\right) f(\alpha, 6)\,d\alpha\,d6.$$

On y devra substituer pour Z, sa valeur, savoir :

$$Z = \frac{\pi}{2\sqrt{z^2+\rho^2}};$$

d'après laquelle on voit que la série comprise entre les pa-

renthèses sera d'autant plus convergente que le rapport $\frac{gt^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ sera plus petit. Mais quelque petit que soit le temps t, si l'on considère un point de la surface fluide, pris dans l'étendue de l'ébranlement primitif, cette série sera toujours en défaut; ce qu'on verra sans peine en observant que ρ exprime la distance du point que l'on considère, au point de l'ébranlement primitif, qui répond aux coordonnées α et 6; en sorte que cette quantité devient nulle entre les limites de l'intégration relative à ces deux variables; et comme on a aussi $z=0$, il s'ensuit que les termes de la série, qui ont tous pour diviseurs des puissances de $\sqrt{z^2+\rho^2}$, deviendront infinis entre ces limites; d'où il résulte que, dans le cas dont nous parlons, la fonction ne peut pas se développer suivant les puissances de t.

S'il s'agit, au contraire, d'un point situé à une distance du centre de l'ébranlement primitif, très-grande par rapport à l'étendue de cet ébranlement, et si l'on convient de placer à ce centre l'origine des coordonnées x et y, il arrivera alors que les variables α et 6 seront très-petites par rapport à ces coordonnées, et qu'on pourra les négliger dans la valeur de ρ, pourvu toutefois que gt^2 ne soit pas, en même temps, une très-grande quantité relativement $\sqrt{z^2+\rho^2}$. De cette manière si l'on fait $\sqrt{x^2+y^2}=r$, on aura

$$\rho=r \quad \text{et } Z=\frac{\pi}{2\sqrt{z^2+r^2}};$$

la série comprise entre les parenthèses, deviendra indépendante de α et 6; et si l'on fait de plus

$$\iint f(\alpha, 6)\, d\alpha\, d6 = A,$$

il en résultera

$$\varphi = -\frac{Agt}{\pi^2}\left(\frac{dZ}{dz} + \frac{gt^2}{2.3}\cdot\frac{d^2Z}{dz^2} + \frac{g^2t^4}{2.3.4.5}\cdot\frac{d^3Z}{dz^3}\right.$$
$$\left. + \frac{g^3t^6}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{d^4Z}{dz^4} + \text{etc.}\right). \qquad (b)$$

(35) Cette valeur de φ n'étant fonction que de r et z, il s'ensuit que les vîtesses qu'on en déduira seront les mêmes pour tous les points situés dans un même plan horizontal et à une même distance de l'ébranlement primitif. Les vîtesses horizontales $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dy}$, se composeront en une seule vîtesse, dirigée suivant le rayon r, et exprimée par $\frac{d\varphi}{dr}$. Celle-ci, et la vîtesse verticale $\frac{d\varphi}{dz}$, seront proportionnelles à A, qui représente le volume du segment plongé dans le fluide, du corps solide dont l'immersion est censée avoir produit le mouvement. Pour connaître les lois des premières vîtesses des molécules, nous conserverons seulement le premier terme de cette série; et en y mettant pour Z sa valeur, nous aurons

$$\varphi = \frac{Agtz}{2\pi(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}};$$

d'ou l'on déduit, pour ces vîtesses,

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{3Agtzr}{2\pi(r^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{Agt(r^2-2z^2)}{2\pi(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

La première est négative pour toutes les molécules, ce qui signifie qu'elles commencent toutes à se mouvoir, en se rapprochant, dans le sens horizontal du lieu de l'ébranlement. L'autre est négative pour les unes, et positive pour

les autres : par exemple, elle est négative, pour les molécules situées au-dessous de l'ébranlement primitif, et positive, pour celles de la surface; de sorte qu'à l'origine du mouvement, les premières s'élèvent, et les dernières s'abaissent verticalement. Si l'on appelle V, la résultante de ces deux vitesses; que l'on désigne par r', la distance d'une molécule quelconque au centre de l'ébranlement primitif, et par θ, l'angle que ce rayon r' fait avec la verticale, on trouvera

$$V = \frac{Agt\sqrt{1+3.\cos^2.\theta}}{\pi r'^3};$$

ce qui montre que sur un même rayon, ou pour une même valeur de θ, les premières vitesses des molécules suivent la raison inverse du cube des distances. On voit aussi qu'à distance égale et pour des directions différentes, les molécules reçoivent des vitesses différentes; ce qui n'avait pas lieu dans le cas d'une fluide contenu dans un canal (nº 12).

(36) Pour suivre toujours la même marche que dans le IIIe §, nous allons présentement chercher à développer la fonction φ, suivant les puissances négatives de t, ce qui nous fera connaître les lois des dernières vîtesses des molécules fluides.

En mettant u' à la place de u, dans l'équation (a); faisant

$$z+\rho.\cos.\omega.\sqrt{-1}=k, \quad z-\rho.\cos.\omega.\sqrt{-1}=k',$$

$$\int c^{-u'k}.\sin.ut\sqrt{g}.du=Y, \quad \int c^{-u'k'}\sin.ut\sqrt{g}.du=Y',$$

et observant qu'il s'ensuit

$$\int e^{-u^2 k} \sin. ut\sqrt{g}. u^2 du = -\frac{1}{g}\cdot\frac{d^2Y}{dt^2},$$

$$\int e^{-u^2 k'} \sin. ut\sqrt{g}. u^2 du = -\frac{1}{g}\cdot\frac{d^2Y'}{dt^2},$$

cette équation (a) prendra la forme

$$\varphi = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{g}}\cdot\iiint\left(\frac{d^2Y}{dt^2}+\frac{d^2Y'}{dt^2}\right)f(\alpha,\theta).d\omega\, d\alpha\, d\theta. \quad (c)$$

Y' se déduira de Y, en changeant k en k', et la valeur de Y, sous forme finie, sera (nº 10)

$$Y = \frac{\sqrt{g}}{2\pi}\cdot e^{-\frac{gt^2}{4k}}\int e^{\frac{gt^2}{4k}}dt;$$

l'intégrale étant prise de manière qu'elle s'évanouisse quand $t=0$. De plus si l'on exclut les points de la surface, et ceux qui en sont très-voisins, et si l'on suppose le temps t devenu très-grand, on aura (nº 13)

$$Y = \frac{1}{t\sqrt{g}}\left(1+\frac{2k}{gt^2}+1.3.\left(\frac{2k}{gt^2}\right)^2+1.35.\left(\frac{2k}{gt^2}\right)^3 + 1.3.5.7.\left(\frac{2k}{gt^2}\right)^4+\text{etc.}\right);$$

d'où l'on conclut, en remettant pour k et k' leurs valeurs,

$$Y+Y' = \frac{2}{t\sqrt{g}}\left(1+\frac{2z}{gt^2}+\frac{12(z^2-\rho^2.\cos.^2\omega)}{g^2t^4}+\frac{120(z^3-3r\rho.\cos.\omega)}{g^3t^6}+\text{etc.}\right).$$

Multipliant par $d\omega$, intégrant depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=\frac{\pi}{2}$, et différenciant deux fois de suite par rapport à t, il vient

$$\int\left(\frac{d^2Y}{dt^2}+\frac{d^2Y'}{dt^2}\right)d\omega=\frac{2\pi}{t^3\sqrt{g}}\left(1+\frac{12z}{gt^2}+\frac{180\left(z^2-\frac{1}{3}\rho^2\right)}{g^2t^4}+\frac{3360\,z^3}{g^4t^6}+\text{etc.}\right).$$

D'ailleurs on a $\rho^2=x^2+y^2-2x\alpha-2y\beta+\alpha^2+\beta^2$; si donc on fait

$$\iint f(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta=\mathrm{A},\quad \iint f(\alpha,\beta)\,(\alpha^2+\beta^2)\,d\alpha\,d\beta=\mathrm{B},$$

et si l'on suppose nulles les deux intégrales $\iint f(\alpha,\beta)\,\alpha\,d\alpha\,d\beta$, $\iint f(\alpha,\beta)\,\beta\,d\alpha\,d\beta$, condition qu'on peut toujours remplir en disposant de l'origine des coordonnées, l'équation (c) deviendra

$$\varphi=-\frac{2\mathrm{A}}{\pi g t^3}-\frac{24\,\mathrm{A}z}{\pi g^2t^5}-\frac{180\left[(2z^2-x^2-y^2)\mathrm{A}-\mathrm{B}\right]}{\pi g^3t^7}-\frac{6720\,\mathrm{A}z^3}{\pi g^4t^9}-\text{etc.};$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\varphi}{dz}=-\frac{24\,\mathrm{A}}{\pi g^2t^5}-\frac{720\,\mathrm{A}z}{\pi g^3t^7}-\text{etc.},$$

$$\frac{d\varphi}{dy}=\frac{360\,\mathrm{A}y}{\pi g^3t^7}+\text{etc.},$$

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{360\,\mathrm{A}x}{\pi g^3t^7}+\text{etc.}$$

On voit, par ces résultats, qu'après un temps très-considérable, le mouvement horizontal des molécules fluides est insensible par rapport à leur mouvement vertical. La vîtesse finale, dans le sens vertical, est indépendante de leur coordonnées, et suit la raison inverse de la cinquième puissance du temps. Comme elle est négative, cela signifie que chaque

molécule achève de se mouvoir en s'élevant verticalement ; le contraire à lieu, comme on l'a vu (n° 13), pour un fluide contenu dans un canal d'une largeur constante.

(37) Jusqu'ici nous n'avons attribué aucune forme particulière au corps solide dont l'immersion produit l'ébranlement du fluide ; nous le supposerons maintenant très-peu enfoncé, ce qui est nécessaire pour qu'à l'origine du mouvement les mêmes molécules demeurent à la surface, et parconséquent, pour que nos formules puissent convenir à la question (n° 2). Dans cette hypothèse, la surface du corps, dans toute l'étendue du segment plongé, se confond sensiblement avec son paraboloïde osculateur au point le plus bas ; prenant donc la projection de ce point sur le niveau du fluide, pour origine des coordonnées x et y, et les axes de ces coordonnées dans les plans de la plus petite et de la plus grande courbure de la surface au même point, l'équation de ce paraboloïde, et parconséquent l'équation de la partie plongée de la surface, sera

$$z' = h\left(1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{l'^2}\right).$$

La section *à fleur d'eau* est une ellipse qui a pour équation

$$1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{l'^2} = 0;$$

l et l' sont donc les deux demi-axes de cette ellipse ; et si l'on suppose $l > l'$, $2l$ sera la plus grande largeur de l'ébranlement primitif, et $2l'$, sa plus petite largeur. Le coëfficient h est l'ordonnée verticale du point le plus bas, ou la *flèche* du segment plongé : le corps ayant été très-peu enfoncé, cette

quantité h doit être assez petite, relativement à $2l$ et à $2l'$.

Cette valeur de z' est celle de la fonction $f(x,y)$ (nº 30) dans les limites de l'ébranlement primitif; hors de ces limites, cette fonction sera égale à zéro. Mettant α et β, à la place de x et y, nous aurons de même

$$f(\alpha,\beta)=h\left(1-\frac{\alpha^2}{l^2}-\frac{\beta^2}{l'^2}\right);$$

au moyen de quoi l'équation (a) deviendra

$$\varphi=\frac{h\sqrt{g}}{\pi^2}\iiiint\left(1-\frac{\alpha^2}{l^2}-\frac{\beta^2}{l'^2}\right)e^{-zu}\cos.(u\rho.\cos.\omega).\sin.(t\sqrt{gu}).\sqrt{u}\,du\,d\omega\,d\alpha\,d\beta;$$

et maintenant la double intégration, relative à α et β, ne devra plus s'étendre qu'aux valeurs de ces coordonnées qui répondent à des points compris dans l'aire de l'ellipse dont l'équation est

$$1-\frac{\alpha^2}{l^2}-\frac{\beta^2}{l'^2}=0.$$

Pour avoir égard à ces limites, nous remplacerons α et β, par deux autres variables s et ψ, telles que l'on ait

$$\alpha=ls.\cos.\psi,\quad \beta=l's.\sin.\psi,$$

et nous étendrons les valeurs de s, depuis $s=0$ jusqu'à $s=1$, et celles de ψ, depuis $\psi=0$ jusqu'à $\psi=2\pi$. Par les règles connues de la transformation des intégrales doubles, on trouve

$$d\alpha\,d\beta=ll's\,ds\,d\psi;$$

par conséquent on aura

$$\varphi=\frac{hll'\sqrt{g}}{\pi^2}\iiiint(1-s^2)\,e^{-zu}\cos.(u\rho.\cos.\omega).\sin.(t\sqrt{gu}).s\sqrt{u}.du\,ds\,d\omega\,d\psi;\quad (d)$$

les intégrales étant prises depuis $u=0$, $s=0$, $\omega=0$, $\psi=0$, jusqu'à $u=\frac{1}{0}$, $s=1$, $\omega=\frac{\pi}{2}$, $\psi=2\pi$.

En désignant par r, le rayon vecteur horizontal d'une molécule quelconque, et par θ l'angle que ce rayon fait avec l'axe des x, en sorte qu'on ait

$$x=r.\cos.\theta,\quad y=r.\sin.\theta,$$

la quantité ρ, qui entre dans cette formule, sera déterminée par cette équation :

$$\rho^2=r^2-2rs(l.\cos.\theta.\cos.\psi+l'.\sin.\theta.\sin.\psi)+s^2(l^2.\cos^2.\psi+l'^2.\sin^2.\psi).$$

§ VI.

Propagation des ondes à la surface du fluide, en ayant égard à ses deux dimensions horizontales.

(38) Nous ne considérerons les valeurs de l'ordonnée z', dont cette propagation dépend, que pour des points très-éloignés de l'ébranlement primitif ; en sorte que le rayon r sera supposé très-grand par rapport à l et l'. De plus nous distinguerons, comme dans le IVe §, deux époques différentes : celle où le temps n'est pas encore très-considérable, et celle, au contraire, où la quantité gt^2 est devenue très-grande par rapport à r, de manière que $\frac{gt^2}{r}$ soit du même ordre de grandeur que $\frac{r}{l}$ et $\frac{r}{l'}$. A ces deux époques, on a des ondes qui suivent des lois très-distinctes que nous allons successivement examiner.

Dans le premier cas, nous pouvons employer l'équa-

tion (b) du n° 34, à la détermination de l'ordonnée z'. En développant la valeur Z, qui doit y être substituée, suivant les puissances de z, on a

$$Z=\frac{\pi}{2r}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{r^2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^4}{r^4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^6}{r^6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{z^8}{r^8}-\text{etc.}\right);$$

tirant de-là les valeurs des différentielles successives de Z par rapport à z, faisant ensuite $z=0$, et les substituant dans l'équation (b), il vient

$$\varphi=\frac{A}{2\pi}\left(\frac{1}{2.3}\cdot\frac{g^2t^3}{r^3}-\frac{(1.3)^2}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{g^4t^7}{r^5}+\frac{(1.3.5)^2}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{g^6t^{11}}{r^7}-\text{etc.}\right);$$

d'où l'on conclut

$$z'=\frac{A\sqrt{p}}{2\pi r^2}\cdot\left(1-\frac{p}{2.1.5}+\frac{p^2}{4.1.2.7.9}-\frac{p^3}{8.1.2.3.9.11.13}\right.$$
$$+\frac{p^4}{16.1.2.3.4.11.13.15.17}\cdots$$
$$\left.\cdots\pm\frac{p^n}{2^n(1.2.3\ldots n)(2n+3.2n+5\ldots 4n+1)}\mp\text{etc.}\right),$$

en observant que $z'=\frac{d\varphi}{g\,dt}$, et faisant, pour abréger,

$$\left(\frac{gt^2}{2r}\right)^2=p.$$

Cette ordonnée sera la même pour tous les points de la surface, également éloignés du centre de l'ébranlement; pour une valeur donnée de p, il est évident qu'elle suivra la raison inverse du quarré de la distance r, ou, ce qui est la même chose, la raison inverse de la quatrième puissance de t. Or, son *maximum*, par rapport à r, sera déterminé

par l'équation $\frac{dz'}{dr} = 0$; savoir, en supprimant le facteur commun à tous les termes :

$$\left.\begin{array}{l} 3 - \frac{p}{2.1} + \frac{p^2}{4.1.2.9} - \frac{p^3}{8.1.2.3.11.13} + \frac{p^4}{16.1.2.3.4.13.15.17} \\ \quad \ldots\ldots \pm \frac{p^n}{2^n(1.2.3\ldots n)(2n+5.2n+7\ldots 4n+1)} \mp \text{etc.} = 0; \end{array}\right\} (e)$$

chaque ordonnée *maxima* répondra donc à une valeur déterminée de p; par conséquent, en s'éloignant du centre de l'ébranlement, elle décroîtra suivant la loi que nous venons d'énoncer. Elle se propagera d'un mouvement uniformément accéléré, et son mouvement apparent sera compris dans l'équation

$$r = \frac{gt^2}{2\sqrt{p}}.$$

L'onde formée par l'intervalle compris entre deux *maxima* consécutifs, s'élargira proportionnellement au quarré du temps; pour cette raison, et à cause de l'abaissement rapide de leurs sommets, les ondes de cette espèce ne seront pas, en général, très-apparentes à la surface de l'eau. Néanmoins nous allons déterminer la vîtesse des deux sommets qui précèdent tous les autres et qui répondent aux deux plus petites racines positives de l'équation (e). Le nombre des racines de cette équation est infini, et leurs grandeurs n'ont pas de limites; mais il ne faut pas oublier qu'on doit rejeter toutes les valeurs très-grandes de la quantité p, puisque nous considérons maintenant le cas où gt^2 n'est pas devenu très-grand par rapport à r, et où p, par conséquent, ne peut pas être très-considérable.

(39) La plus petite racine de l'équation (e) est comprise entre 7 et 8; par la méthode ordinaire on trouve, pour sa valeur approchée,

$$p = 7{,}4152;$$

d'où il résulte, pour le mouvement de la première ordonnée *maxima*,

$$r = \frac{gt^2}{2}(0{,}3672);$$

en sorte que l'accélération de son mouvement est, à celle de la pesanteur, comme 0,3672 est à l'unité; où l'on peut remarquer qu'elle est un peu plus rapide que pour un fluide contenu dans un canal d'une largeur constante (nº 20). On trouve, pour la grandeur de cette ordonnée, calculée au moyen de la série du numéro précédent et de cette valeur de p,

$$z' = \frac{A}{r^2}(0{,}1567), \quad \text{ou } z' = \frac{A}{g^2t^4}(4{,}6472).$$

Après quelques essais, on reconnaît que la seconde racine de l'équation (e) est comprise entre 60 et 61; sa valeur approchée est $p = 60{,}19$; l'on a pour le mouvement de la seconde ordonnée *maxima* qui lui correspond,

$$r = \frac{gt^2}{2}(0{,}1289),$$

et pour la grandeur de cette ordonnée

$$z' = -\frac{A}{r^2}(2{,}1766), \quad \text{ou } z' = -\frac{A}{g^2t^4}(524{,}04).$$

(40) Supposons maintenant que le rapport $\frac{gt^2}{r}$ soit devenu

très-grand, et du même ordre que $\frac{r}{l}$ et $\frac{r}{l'}$. On ne peut plus alors faire usage de l'équation (b) pour déterminer z'; mais la valeur exacte de cette ordonnée, déduite de l'équation (d), est

$$z' = \frac{hll'}{\pi^2} \cdot \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int (1-s^2) \cos.(u\rho \cdot \cos.\omega) \cdot \cos.(t\sqrt{gu}) \cdot s\,du\,ds\,d\omega\,d\psi;$$

et il s'agit d'effectuer, s'il est possible, ces quatre intégrations relatives aux variables u, s, ω et ψ.

En remplaçant dans l'équation (13) du n° 18, $x-\alpha$ par $\rho \cdot \cos.\omega$, on a

$$\int \cos.(u\rho \cdot \cos.\omega) \cdot \sin.(t\sqrt{gu}) \cdot du = \frac{gt^2}{2\rho^2 \cdot \cos.^2\omega} \cdot \int \cos.\frac{gt^2(1-v^2)}{4\rho \cdot \cos.\omega} \cdot dv;$$

l'intégrale relative à v étant prise depuis $v=0$ jusqu'à $v=1$. On conclut de-là

$$\int \cos.(u\rho \cdot \cos.\omega) \cdot \cos.(t\sqrt{gu}) \cdot u\,du$$
$$= -\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{t^2}{2\rho^2 \cdot \cos.^2\omega} \cdot \int \cos.\frac{gt^2(1-v^2)}{4\rho \cdot \cos.\omega} \cdot dv\right),$$

et par conséquent

$$z' = -\frac{hll'}{2\pi^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int (1-s^2) \cdot \cos.\frac{gt^2(1-v^2)}{4\rho \cdot \cos.\omega} \cdot \frac{st^2\,dv\,ds\,d\omega\,d\psi}{\rho^2 \cdot \cos.^2\omega}.$$

Mettant de même $\rho \cdot \cos.\omega$ à la place de $x-\alpha$, dans l'équation (17) du n° 21, il vient

$$\frac{gt^2}{\rho^2 \cdot \cos.^2\omega} \int \cos.\frac{gt^2(1-v^2)}{4\rho \cdot \cos.\omega} \cdot dv = \frac{t\sqrt{2g\pi}}{2\rho^{\frac{3}{2}} \cdot \cos.^{\frac{3}{2}}\omega}\left(\cos.\frac{gt^2}{4\rho \cdot \cos.\omega} + \sin.\frac{gt^2}{4\rho \cdot \cos.\omega}\right)$$
$$-\frac{4}{gt^2}\left(1 + 3.5.\left(\frac{4\rho^2 \cdot \cos.^2\omega}{g^2t^4}\right) + 3.5.7.9\left(\frac{4\rho^2 \cdot \cos.^2\omega}{g^2t^4}\right)^2 + \text{etc.}\right);$$

or, gt^2 étant supposé très-grand par rapport à ρ, on peut réduire à son premier terme la série comprise entre les parenthèses ; d'ailleurs, entre les limites données (n° 37), on a

$$\iiint (1-s^2)\, s\, ds\, d\omega\, d\psi = \frac{\pi^2}{4};$$

la valeur de z' deviendra donc

$$z' = -\frac{hll'}{2\pi\sqrt{2g\pi}} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \iiint \left(\cos. \frac{gt^2}{4\rho . \cos. \omega} \right.$$
$$\left. + \sin. \frac{gt^2}{4\rho . \cos. \omega} \right) \frac{(1-s^2)\, t\, s\, ds\, d\omega\, d\psi}{\rho^{\frac{3}{2}} . \cos.^{\frac{3}{2}} \omega} + \frac{3}{g^2} \frac{l'}{t^4}.$$

On effectuera l'intégration relative à ω, dont les limites sont $\omega = 0$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$, en faisant

$$\frac{1}{\cos. \omega} = 1 + x^2;$$

l'intégrale relative à x devra être prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{0}$, et l'on aura

$$\frac{d\omega}{(\cos. \omega)^{\frac{3}{2}}} = 2\, dx \sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}} = \sqrt{2}\, dx + x\mathrm{X}\, dx;$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{2x}{(2\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2}\sqrt{2+x^2})\sqrt{2+x^2}} = \mathrm{X}:$$

il en résultera donc

$$\int \cos. \frac{gt^2}{4\rho . \cos. \omega} \cdot \frac{d\omega}{\cos^{\frac{3}{2}} . \omega} = \sqrt{2} . \int \cos. \frac{gt^2(1+x^2)}{4\rho} . dx$$
$$+ \int \cos. \frac{gt^2(1+x^2)}{4\rho} . x\mathrm{X}\, dx.$$

Par les formules connues, on a

$$\int \cos.\frac{gt^2(1+x^2)}{4\rho}\cdot dx = \left(\cos.\frac{gt^2}{4\rho} - \sin.\frac{gt^2}{4\rho}\right)\cdot\sqrt{\frac{\pi\rho}{2gt^2}};$$

en intégrant par parties, il vient

$$\int \cos.\frac{gt^2(1+x^2)}{4\rho}\cdot x\mathrm{X}\,dx = \frac{2\rho\mathrm{X}}{gt^2}\cdot\sin.\frac{gt^2(1+x^2)}{4\rho}$$
$$-\frac{2\rho}{gt^2}\cdot\int \sin.\frac{gt^2(1+x^2)}{4\rho}\cdot\frac{d\mathrm{X}}{dx}\,dx;$$

mais aux deux limites $x=0$ et $x=\frac{1}{0}$, on a $\mathrm{X}=0$, ce qui fait disparaître le terme en dehors du signe intégral; d'ailleurs la valeur $\frac{d\mathrm{X}}{dx}$ est aussi de cette forme :

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + x\mathrm{X}';$$

X' étant, ainsi que X, une quantité qui devient nulle quand $x=0$, et quand $x=\frac{1}{0}$: on aura donc aussi

$$\int \sin.\frac{gt^2(1+x^2)}{4\rho}\cdot\frac{d\mathrm{X}}{dx}\,dx = \frac{1}{4}\left(\cos.\frac{gt^2}{4\rho} + \sin.\frac{gt^2}{4\rho}\right)\sqrt{\frac{\pi\rho}{gt^2}}$$
$$+\frac{2\rho}{gt^2}\cdot\int \cos.\frac{gt^2(1+x^2)}{4\rho}\cdot\frac{d\mathrm{X}'}{dx}\cdot dx;$$

et l'on pourra continuer de la même manière indéfiniment. Il est évident que l'intégrale relative à ω se trouvera, par cette suite d'opérations, développée suivant les puissances impaires du rapport $\sqrt{\frac{\rho}{gt^2}}$, qu'on suppose très-petit; nous ne conserverons que le premier terme de cette série, et nous

aurons simplement

$$\int cos.\frac{gt^2}{4\rho.cos.\omega}.\frac{d\omega}{cos.^{\frac{3}{2}}\omega}=\left(cos.\frac{gt^2}{4\rho}-sin.\frac{gt^2}{4\rho}\right)\sqrt{\frac{\pi\rho}{gt^2}}.$$

On trouvera de même

$$\int sin.\frac{gt^2}{4\rho.cos.\omega}.\frac{d\omega}{cos.^{\frac{3}{2}}\omega}=\left(cos.\frac{gt^2}{4\rho}+sin.\frac{gt^2}{4\rho}\right)\sqrt{\frac{\pi\rho}{gt^2}};$$

d'où l'on sonclut

$$z'=-\frac{2hll'}{\pi g\sqrt{2}}.\frac{d^2.}{dt^2}\int\int cos.\frac{gt^2}{4\rho}.\frac{(1-s^2)s}{\rho}ds\,d\psi+\frac{3hll'}{g^2t^4};$$

de sorte qu'il ne reste plus à effectuer que les intégrations relatives s et à ψ.

(41) Pour cela, il est nécessaire de substituer pour ρ sa valeur, qui est fonction de ces deux variables (nº 37). Or, en développant, suivant les puissances de l et l', on a

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}+\frac{sl.cos.\theta.cos.\psi+sl'.sin.\theta.sin.\psi}{r^2}+\text{etc};$$

en dehors du *cosinus*, nous pouvons négliger l et l', et remplacer ρ par r; mais, sous le *cosinus*, nous conserverons leurs premières puissances ; de plus, nous ferons

$$l.cos.\theta=\sqrt{l^2.cos^2.\theta+l'^2.sin^2.\theta}.cos.\theta',$$

$$l'.sin.\theta=\sqrt{l^2.cos^2.\theta+l'^2.sin^2.\theta}.sin.\theta';$$

par conséquent nous aurons

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}+\frac{s\sqrt{l^2.cos^2.\theta+l'^2.sin^2.\theta}}{r^2}.cos.(\psi-\theta');$$

et faisant aussi, pour abréger,

$$\frac{gt^2\sqrt{l^2.\cos^2.\theta+l'^2.\sin^2.\theta}}{4r^2}=k,$$

la valeur de z' deviendra

$$z'=-\frac{hll'}{\pi g r\sqrt{2}}\cdot\frac{d^2.}{dt^2}\iint\cos.\Big(\frac{gt^2}{4\rho}$$
$$+ks\cos.(\psi-\theta')\Big)\cdot(1-s^2)\,s\,ds\,d\psi+\frac{3hll'}{g^2t^4}.$$

On s'assurera, comme dans le n° 31, que cette quantité est indépendante de l'angle θ' qui disparaît par l'intégration relative à ψ; faisant donc $\theta'=0$, on aura

$$z'=-\frac{hll'}{\pi g r\sqrt{2}}\cdot\frac{d^2.}{dt^2}\Big[\cos.\frac{gt^2}{4r}\cdot\iint\cos.(ks.\cos.\psi).(1-s^2)\,s\,ds\,d\psi$$
$$-\sin.\frac{gt^2}{4\rho}\iint\sin.(ks.\cos.\psi).(1-s^2)\,s\,ds\,d\psi\Big]+\frac{3hll'}{g^2t^4}.$$

La seconde intégrale comprise, entre les parenthèses, est nulle pour les limites $\psi=0$ et $\psi=2\pi$, parce qu'elle se compose d'éléments égaux deux à deux et de signes contraires; on peut ne prendre la première, que depuis $\psi=0$ jusqu'à $\psi=\frac{\pi}{2}$, pourvu que l'on quadruple le résultat; on aura donc

$$z'=\frac{2\sqrt{2}\,hll'}{\pi g r}\cdot\frac{d^2.}{dt^2}\Big[\cos.\frac{gt^2}{4r}\cdot\iint\cos.(ks.\cos.\psi).(1-s^2)\,s\,ds\,d\psi\Big]+\frac{3hll'}{g^2t^4}.$$

Observons maintenant que r étant très-grand par rapport à l et à l', et gt^2 très-grand par rapport à r, la quantité désignée par k peut avoir telle valeur qu'on voudra; si donc on effectue la double différentiation indiquée par rapport à t,

et qu'on mette pour gt^2, hors des *sinus* et *cosinus*, sa valeur en fonction de k, savoir :

$$gt^2 = \frac{4kr^2}{\sqrt{l^2.\cos^2.\theta + l'^2.\sin^2.\theta}};$$

on obtiendra un terme divisé par r, et d'autres termes divisés par r^2, ou même par r^3, qui seront très-petits et que nous pourrons négliger relativement au premier. Nous pourrons aussi supprimer le terme $\frac{3hll'}{g^2t^4}$ qui se trouvera divisé par r^4; et au moyen de ces réductions nous aurons

$$z' = \frac{2\sqrt{2}hll'k}{\pi r\sqrt{l^2.\cos^2.\theta + l'^2.\sin^2.\theta}} \cdot \cos.\frac{gt^2}{4r} \cdot \iint \cos.(ks.\cos.\psi).(1-s^2)\,s\,ds\,d\psi. \quad (f)$$

L'intégrale relative à s pourrait s'obtenir immédiatement ; mais il sera plus simple de faire

$$s.\cos.\psi = a, \quad s.\sin.\psi = b, \quad s\,ds\,d\psi = da\,db;$$

l'intégrale relative aux nouvelles variables a et b, devra s'étendre à tous les points de l'aire d'un quart-de-cercle dont le rayon est l'unité ; il faudra donc intégrer depuis $b=0$, jusqu'à $b=\sqrt{1-a^2}$, et depuis $a=0$ jusqu'à $a=1$; on aura donc

$$\iint \cos.(ks.\cos.\psi).(1-s^2)\,s\,ds\,d\psi = \iint (1-a^2-b^2)\cos.ka.da\,db$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \int (1-a^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \cos.ka.da\,;$$

d'où il resulte enfin

$$z' = \frac{4\sqrt{2}hll'k}{3\pi r\sqrt{l^2.\cos^2.\theta + l'^2.\sin^2.\theta}} \cdot \cos.\frac{gt^2}{4r} \cdot \int (1-a^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \cos.ka.da.$$

(42) L'intégrale qui reste à prendre, et dont les limites sont $a=0$ et $a=1$, ne peut pas s'obtenir exactement ; mais on en peut assigner une limite qui prouvera que la valeur de z' ne croît pas indéfiniment avec le temps, et qu'au-contraire elle devient nulle, comme cela doit être, lorsque t devient infini.

En effet, en intégrant deux fois de suite par parties, et ayant égard aux limites $a=0$ et $a=1$, on trouve

$$k\int(1-a^2)^{\frac{3}{2}}\cdot cos.ka.da=\frac{3}{k}\int\frac{(1-2a^2).cos.ka}{\sqrt{1-a^2}}\cdot da;$$

or, entre ces limites, la quantité $(1-2a^2).cos.ka$ n'est jamais plus grande que l'unité; on aura donc, abstraction faite du signe,

$$k\int(1-a^2)^{\frac{3}{2}}\cdot cos.ka.da < \frac{3}{k}\int\frac{da}{\sqrt{1-a^2}} < \frac{3\pi}{2k};$$

et comme $cos.\frac{gt^2}{4r}$ ne peut pas non plus surpasser l'unité, il en résulte

$$z' < \frac{2\sqrt{2}\,hll'}{kr\sqrt{l^2.cos^2.\theta+l'^2.sin^2.\theta}},$$

ou bien, en remettant pour k sa valeur,

$$z' < \frac{8\sqrt{2}\,hll'r}{gt^2\,(l^2.cos^2.\theta+l'^2.sin^2.\theta)};$$

limite qui devient nulle, comme on voit, lorsque t devient infini.

(43) Si nous faisons, pour abréger,

$$\frac{4\sqrt{2}.hll'k.\int(1-a^2)^{\frac{3}{2}}.cos.ka.da}{3\pi r\sqrt{l^2.cos^2.\theta+l'^2.sin^2.\theta}}=K,$$

la valeur de z' deviendra

$$z' = K \cos. \frac{gt^2}{4r}.$$

Cette valeur renferme donc deux facteurs K et $\cos. \frac{gt^2}{4r}$, qui varient l'un et l'autre avec le temps; mais $\frac{gt^2}{4}$ étant supposé très-grand par rapport à r, et K n'étant fonction que de k, il en résulte que le premier facteur varie bien plus lentement que le dernier, de telle manière que celui-ci passe de son *maximum* positif à son *maximum* négatif, dans un intervalle de temps pendant lequel l'autre demeure à très-peu-près constant. De cette considération résultent des conséquences relatives aux oscillations verticales des molécules superficielles du fluide, que nous allons successivement énoncer et qui sont analogues aux lois précédemment trouvées pour le cas d'un canal d'une largeur constante.

1° A raison du facteur $\cos. \frac{gt^2}{4r}$, chaque molécule fait des oscillations verticales dont l'amplitude, c'est-à-dire la hauteur du point le plus haut au-dessus du point le plus bas, est double de l'autre facteur K. Cette amplitude varie avec le temps pour le même point, et au même instant, d'un point à un autre.

2° Si l'on appelle t' le temps d'une oscillation, on aura, pour le déterminer,

$$\frac{g(t+t')^2}{4r} - \frac{gt^2}{4r} = \pi;$$

d'où l'on tire, à très-peu-près,

$$t' = \frac{2\pi r}{gt};$$

ce qui montre que la durée des oscillations diminue, pour le même point, à mesure que le temps augmente.

3° Tous les points situés à la même distance r du centre de l'ébranlement, font au même instant leurs oscillations dans le même temps; mais toutes ces oscillations n'ont pas la même amplitude, à cause que la valeur de K renferme l'angle θ. Si de ce centre on décrit deux cercles très-rapprochés, l'un du rayon r, et l'autre d'un rayon $r+\lambda$, déterminé par cette équation:

$$\frac{gt^2}{4r}-\frac{gt^2}{4(r+\lambda)}=\pi,$$

les points de la seconde circonférence feront leurs oscillations en sens inverse de ceux de la première, c'est-à-dire que quand l'un de ceux-ci atteindra sa plus grande élévation, celui qui répond au même angle θ sur l'autre circonférence, atteindra au contraire son plus grand abaissement, et *vice versà*. La surface du fluide peut être partagée en une suite de zones semblables qui formeront une suite d'*ondes* circulaires, mobiles en apparence à cette surface; la largeur de l'onde, qui répond au rayon r, sera la quantité λ, et l'on aura, à très-peu-près,

$$\lambda=\frac{4\pi r^2}{gt^2};$$

où l'on voit qu'en un même endroit de la surface, les ondes se rétrécissent à mesure que le temps augmente.

4° Si l'on veut comparer la largeur des ondes à la durée des oscillations, ou λ à t', on aura

$$t'=\pi\sqrt{\frac{\lambda}{\pi g}}:$$

ce temps est donc proportionnel à la racine quarrée de la largeur, et égal à celui des oscillations d'un pendule simple dont la longueur serait $\frac{\lambda}{\pi}$; résultat identiquement le même que celui qu'on a trouvé dans le cas d'un canal vertical (n° 21).

5° En regardant l'angle θ comme donnée, et comme déterminant la direction d'un plan vertical mené par le centre de l'ébranlement primitif, on peut suivre dans ce plan, comme nous l'avons fait pour le cas d'un canal d'une largeur constante, le mouvement apparent des points dont les oscillations sont nulles, et de ceux pour lesquels l'amplitude $2K$ est un *maximum* par rapport à r, abstraction faite du signe. Par rapport aux premiers points, l'équation $2K = 0$ se réduit à

$$\int (1 - a^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \cos. ka . da = 0;$$

et relativement aux seconds, si l'on observe que $\frac{dk}{dr} = -\frac{2k}{r}$, on trouve que l'équation $\frac{dK}{dr} = 0$ devient

$$3\int (1 - a^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \cos. ka . da - 2k \int (1 - a^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sin. ka . a da = 0. \quad (g)$$

Pour chaque valeur réelle et positive de k, tirée de l'une ou de l'autre de ces équations, on aura

$$r = \frac{t\sqrt{g}\sqrt[4]{l^2 . \cos^2 . \theta + l'^2 . \sin^2 . \theta}}{2\sqrt{k}};$$

d'où il résulte que les points de cette espèce se propagent d'un mouvement uniforme, avec une vîtesse proportionnelle à $\sqrt[4]{l^2 . \cos^2 . \theta + l'^2 . \sin^2 . \theta}$. L'amplitude *maxima*, qui répond à

l'une de ces valeurs de k, suit la raison inverse de r, et par-conséquent la raison inverse de t; la moitié de cette amplitude est l'ordonnée verticale des points auxquels elle répond; les ondes que nous considérons maintenant doivent donc être, à de grandes distances du centre de l'ébranlement, beaucoup plus sensibles que celles qui se propagent d'un mouvement accéléré, puisque les hauteurs de celles-ci sont en raison inverse des quarrés des distances ou des quatrièmes puissances du temps (nº 38).

6º Comme la vîtesse apparente des points dont nous parlons dépend de l'angle θ, excepté dans le cas particulier où l'on a $l=l'$, il s'ensuit qu'à un instant donné, ils ne doivent pas être rangés sur des cercles concentriques autour du centre de l'ébranlement primitif. Ainsi, les points dont les oscillations sont nulles, forment à la surface des suites de courbes qui se propagent uniformément, en restant semblables à elles-mêmes; et si l'on fait

$$r.\cos.\theta=x, \qquad r.\sin.\theta=y,$$

l'équation générale de ces courbes, à un instant quelconque, sera

$$(x^2+y^2)^3=\frac{g^2t^4}{16k}(l^2x^2+l'^2y^2);$$

en sorte qu'elles formeront des ovales, allongés dans le sens du plus grand diamètre de l'ébranlement primitif.

7º C'est dans cette direction que les oscillations *maxima* se propageront avec la plus grande vîtesse, et dans le sens du plus petit diamètre, qu'elles se propageront le plus lentement; car si l'on fait successivement $\theta=0$ et $\theta=\frac{\pi}{2}$, dans

la valeur précédente de r, on aura

$$r = \frac{t\sqrt{gl}}{2\sqrt{k}}, \quad r = \frac{t\sqrt{gl'}}{2\sqrt{k}};$$

d'où il résulte, en supposant $l > l'$, que la vîtesse dans la première direction est à la vîtesse dans la seconde, comme $\sqrt{l}$ est à $\sqrt{l'}$. Au contraire, à distance égale de l'ébranlement primitif, l'amplitude de ces oscillations est plus grande dans la seconde direction que suivant la première; car en faisant d'abord $\theta = 0$, la valeur précédente de K devient

$$K = \frac{4\sqrt{2}\,hl'k}{3\pi r} \cdot \int (1 - a^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \cos. ka.da,$$

et en faisant ensuite $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a

$$K = \frac{4\sqrt{2}\,hlk}{3\pi r} \cdot \int (1 - a^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \cos. ka.da;$$

où l'on voit que la seconde valeur est à la première comme l est à l'.

(44) Lorsque le corps dont l'immersion a produit l'ébranlement du fluide, est un solide de révolution, on a $l = l'$, et tout est semblable autour de cet ébranlement. Dans ce cas particulier, que nous allons spécialement examiner, les points dont les oscillations sont nulles, sont rangés sur des cercles concentriques et mobiles, et il en est de même de ceux qui répondent aux oscillations *maxima*. Les premiers cercles partagent les ondes en groupes dont chacun peut être pris, comme dans le cas d'un canal vertical, pour une seule onde *dentelée;* les ondes dentelées s'élargissent proportionnellement au temps à mesure qu'elles se propagent; les mouve-

mens des cercles qui les terminent sont uniformes et compris dans l'équation

$$r = \frac{t\sqrt{gl}}{2\sqrt{k}};$$

la valeur de k étant tirée de l'équation $P = 0$, en faisant, pour abréger,

$$\int (1 - a^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \cos. ka . da = P.$$

Les cercles correspondans aux oscillations *maxima* se propagent suivant la même loi, c'est-à-dire avec une vîtesse constante, que l'on peut prendre pour celle des ondes dentelées auxquelles ils appartiennent, et qui est proportionnelle à la racine quarrée du rayon l de la section à *fleur d'eau* du corps solide dont l'immersion a produit le mouvement. La valeur de k, ralative à ces courbes, est donnée par l'équation (g) que l'on peut écrire sous cette autre forme :

$$3P + 2k\frac{dP}{dk} = 0. \qquad (h)$$

Enfin, en appelant K' l'amplitude de ces oscillations, qui est double de la quantité K, on aura

$$K' = \frac{8\sqrt{2}\,hlk}{3\pi r} \cdot P;$$

et l'on devra mettre dans P, pour k, sa valeur tirée de l'équation précedente.

Nous allons maintenant déterminer, par approximation, les plus petites racines positives de cette équation, lesquelles répondent aux ondes dentelées qui se propagent avec les plus grandes vîtesses.

(45) En développant $\cos. ka$ suivant les puissances de k, P se trouve développée de même; et si l'on fait généralement

$$\int (1-a^2)^{\frac{3}{2}} \cdot a^{2n} da = A_n,$$

on aura

$$P = A_0 - A_1 \frac{k^2}{2} + A_2 \frac{k^4}{2.3.4} - A_3 \frac{k^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

Au moyen de l'intégration par parties, on peut réduire A_n à A_{n-1}; et si l'on a égard aux limites $a=0$ et $a=1$, on trouve

$$A_n = \frac{2n-1}{2(n+2)} \cdot A_{n-1};$$

on a d'ailleurs

$$A_0 = \int (1-a^2)^{\frac{3}{2}} \cdot da = \frac{3\pi}{16};$$

d'où l'on conclut

$$A_n = \frac{1.3.5.7\ldots 2n-1}{1.2.3.4\ldots . n+2} \cdot \frac{3\pi}{2^{n+3}},$$

et par conséquent

$$P = \frac{3\pi}{8}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\cdot\frac{k^2}{4} + \frac{1}{(1.2)^2.3.4}\cdot\left(\frac{k^2}{4}\right)^2 - \frac{1}{(1.2.3)^2.4.5}\cdot\left(\frac{k^2}{4}\right)^3 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots . \pm \frac{1}{(1.2.3\ldots n)^2.(n+1).(n+2)}\left(\frac{k^2}{4}\right)^n \mp \text{etc.}\right).$$

D'après cette valeur de P, et en faisant $\frac{k^2}{4} = p$, l'équation (h) devient

$$\frac{3}{2} - \frac{7p}{2.3} + \frac{11p^2}{(1.2)^2.3.4} - \frac{15p^3}{(1.2.3)^2.4.5} + \ldots .$$
$$\ldots . \pm \frac{(3+4n)p^n}{(1.2.3\ldots n)^2(n+1)(n+2)} \mp \text{etc.} = 0; \qquad (i)$$

c'est donc cette équation qu'il s'agit de résoudre par approximation.

(46) Sa plus petite racine est comprise entre 1 et 2; par la méthode ordinaire on trouve, pour sa valeur approchée,

$$p=\frac{k^2}{4}=1,8628;$$

d'où l'on conclut, pour le mouvement de la première onde, rapporté au cercle des plus grandes oscillations verticales,

$$r=(0,3027)\,t\sqrt{gl};$$

en sorte que sa vîtesse est moindre d'environ un sixième, que celle de l'onde qui se propage la première dans un canal d'une largeur contante (n° 24).

En calculant, au moyen de la série précédente, la valeur de P qui répond à cette première racine, et la substituant dans celle de K', on trouve, pour l'amplitude des plus grandes oscillations,

$$K'=(0,9788)\frac{hl}{r}, \quad \text{ou } K'=(3,2344)\,h\sqrt{\frac{l}{gt^2}}.$$

On trouve aussi pour leur durée t', et pour la largeur λ de de l'onde partielle qui répond à ces oscillations (n° 43),

$$t'=(1,9015)\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \lambda=(1,1509)\,l.$$

Après quelques essais, on trouve que la seconde racine de l'équation (i) est comprise entre 11 et 12; et si l'on prend $p=11,5$, il en résulte, pour le mouvement de la deuxième onde,

$$r=(0,1920)\,t\sqrt{gl};$$

ce qui ne diffère pas beaucoup de celui de la même onde dans le cas d'un canal d'une largeur constante (nº 24). La valeur de K' qui répond à cette seconde racine, calculée au moyen de la série du numéro précédent, se trouve négative, mais on peut évidemment faire abstraction du signe de cette amplitude : sa valeur absolue est

$$K'=(0,2609)\frac{hl}{r}, \quad \text{ou } K'=(1,3588)h\sqrt{\frac{l}{gt^2}};$$

en sorte qu'à un instant donné, elle n'est pas la moitié de celle qui répond à la première, et pour la même distance du lieu de l'ébranlement, elle n'en est pas le tiers. On trouve aussi pour les valeurs de t' et λ, relatives à cette deuxième racine,

$$t'=(1,2069)\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \lambda=(0,4632)\,l.$$

Supposons, par exemple, que le diamètre de l'ébranlement primitif ait été d'un décimètre; nous aurons $l=0^m,05$; on a d'ailleurs $g=9^m,8088$, en prenant la seconde sexagésimale pour unité de temps; il résulte de ces valeurs, pour la première onde,

$$r=(0,2121)t, \quad K'=(0,2309)\frac{h}{t}, \quad t=0'',1358, \quad \lambda=0^m,0575.$$

et pour la deuxième,

$$r=(0,1345)t, \quad K'=(0,0971)\frac{h}{t}, \quad t'=0'',0862, \quad \lambda=0^m,0132.$$

Le cercle des oscillations nulles qui sépare ces deux ondes l'une de l'autre, répond à la plus petite racine de l'équation $P=0$, ou de

$$\frac{1}{2} - \frac{p}{2.3} + \frac{p^2}{(1.2)^2.3.4} - \frac{p^3}{(1.2.3)^2.4.5} + \frac{p^4}{(1.2.3.4)^2.5.6} - \text{etc.} = 0.$$

Cette racine est comprise entre 6 et 7, et si l'on prend $p = 6,5$, on a, pour le mouvement de ce cercle,

$$r = (0,2214)\,t\sqrt{gl};$$

et dans le cas de $l = 0^m,05$, il vient $r = (0,1404)\,t$.

(47) Pour confirmer ces résultats de la théorie, nous allons en faire l'application à quelques expériences sur la vîtesse des ondes, que M. Biot a faites autrefois, et dont il a conservé une note qu'il a bien voulu nous communiquer. Cette note renferme les résultats de quatre expériences dans lesquelles on a observé le temps que la première onde, produite par l'immersion d'un corps solide d'une figure connue, emploie à parcourir un espace égal à un mètre; or, en faisant $r = 1$, dans la formule $r = (0,3027)\,t\sqrt{gl}$ que nous venons de trouver pour le mouvement de cette onde, on en déduit

$$t = \frac{3,3036}{\sqrt{gl}};$$

il s'agit donc de comparer le temps observé par M. Biot à celui qui est déterminé par cette formule, dans laquelle on fera $g = 9^m,8088$, et l'on exprimera le rayon l en mètres : le temps se trouvera alors exprimé en secondes sexagésimales. Le tableau suivant contient, dans la première colonne, l'indication de la figure du corps plongé : dans la seconde, la valeur du rayon l de sa section à *fleur d'eau;* dans la troisième, le temps observé ; et dans la quatrième, le temps calculé.

CORPS PLONGÉS.	VALEURS DE l.	TEMPS OBSERVÉS.	TEMPS CALCULÉS.
Sphère d'un rayon égal à $0^m,05$.	$l=0^m,03$	5"	6",09
Sphère d'un rayon égal à $0^m,1$.	$l=0^m,0436$	4"	5",05
Paraboloïde.	$l=0^m,02$	7"	7",46
Ellipsoïde dont l'axe vertical est double de l'horizontal.	$l=0^m,015$	8"	8",61

Si l'on fait attention que M. Biot n'a pas donné les fractions de secondes, on verra que la différence entre le temps calculé et le temps observé, qui s'élève à une seconde dans les deux premières expériences, et seulement à une demi-seconde dans les deux dernières, est comprise dans les limites des erreurs que ce genre d'observations peut comporter. On peut aussi remarquer que les temps observés sont tous quatre moindres que les temps calculés, ce qui vient sans doute de ce que M. Biot aura suivi le mouvement apparent d'un des cercles qui précèdent celui des plus grandes oscillations auquel se rapportent les temps calculés.

La formule qui nous a servi à calculer le temps de la propagation des ondes, suppose qu'elles ont été produites par l'immersion d'un paraboloïde, ce qui n'est vrai rigoureusement que dans la troisième expérience, et ne pourrait être admis pour les trois autres qu'autant que la flèche du segment plongé serait assez petite par rapport au diamètre de

la section à fleur d'eau (nº 37); or, dans ces quatre expériences, cette flèche était égale à un centimètre, de manière qu'elle s'élevait dans l'une d'entre elles au tiers du diamètre; on pourrait donc craindre, malgré l'accord que nous remarquons entre ces expériences et les résultats de l'analyse, que l'hypothèse de notre calcul ne leur fût point applicable; c'est pourquoi il ne sera pas inutile de chercher la correction de la vîtesse des ondes, due à ce que le segment plongé s'écarte sensiblement de la figure d'un paraboloïde. On verra que cette correction est très-petite en général, et que dans les expériences que nous citons, elle ne peut être d'aucune considération; en sorte qu'il est permis de les regarder comme une confirmation satisfaisante de la théorie.

(48) Supposons donc que le corps dont l'immersion produit les ondes, soit un ellipsoïde de révolution, au lieu d'un paraboloïde; soient a et b ses demi-axes vertical et horizontal; son équation, rapportée à son centre et à ses axes, sera

$$a^2z^2 + b^2u^2 = a^2b^2;$$

z étant une ordonnée verticale, et u une abscisse horizontale. Appelons h la flèche du segment plongé, et transportons l'origine des coordonnées au centre de sa base; l'ordonnée verticale, comptée de cette nouvelle origine, exprimera la valeur de la fonction $f(\alpha, \beta)$ (nº 30), et l'abscisse u sera égale à $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; on aura d'ailleurs

$$z = b - h + f(\alpha, \beta);$$

substituant donc pour z sa valeur tirée de l'équation précédente, il vient

$$f(\alpha, \beta) = h - b + b\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2}}.$$

Or, $\frac{u}{a}$ doit être une fraction d'autant plus petite que le corps est moins enfoncé dans le fluide; on aura donc une série convergente, en développant $\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}}$ suivant les puissances de cette fraction; et si l'on néglige les puissances supérieures à la cinquième, on aura

$$f(\alpha, \beta) = h - \frac{bu^2}{2a^2} - \frac{bu^4}{8a^4}.$$

En égalant cette quantité à zéro, u deviendra le rayon de la section à *fleur d'eau* que nous avons précédemment désigné par l; on a donc

$$h = \frac{bl^2}{2a^2}\left(1 + \frac{l^2}{4a^2}\right).$$

Tirant de-là la valeur de b, la substituant dans l'équation précédente, et négligeant les quarrés et les produits des fractions $\frac{u^2}{a^2}$ et $\frac{l^2}{a^2}$, il vient

$$f(\alpha, \beta) = h\left(1 - \frac{u^2}{l^2}\right)\left(1 + \frac{u^2}{4a^2}\right);$$

ou bien en faisant, comme plus haut (n° 37),

$$u = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = ls,$$

cette valeur de $f(\alpha, \beta)$ prend la forme:

$$f(\alpha, \beta) = h(1 - s^2)(1 + ms^2);$$

en faisant, pour abréger, $\frac{l^2}{4a^2} = m$.

Maintenant on s'assurera aisément qu'en partant de cette expression de la fonction $f(\alpha, \beta)$, et par une suite de réductions semblables à celles qui nous ont conduits à l'équation (f) du n° 41, on obtiendra, au lieu de cette équation, cette autre expression de l'ordonnée z' de la surface à un instant quelconque :

$$z' = \frac{2\sqrt{2}\,hlk}{\pi r} \cdot \cos. \frac{gt^2}{4r} \cdot \iint \cos.(ks.\cos.\psi)(1-s^2)(1+ms^2)\, s\, ds\, d\psi;$$

l'intégrale étant prise depuis $s=0$, jusqu'à $s=1$, et depuis $\psi=0$, jusqu'à $\psi=\frac{\pi}{2}$; et en faisant toujours

$$\frac{gt^2 l}{4r^2} = k.$$

On en déduira les mêmes conséquences que plus haut relativement aux oscillations verticales des molécules superficielles; et si l'on fait

$$\iint \cos.(ks.\cos.\psi)(1-s^2)(1+ms^2)\, s\, ds\, d\psi = P',$$

les valeurs de k qui répondent aux *maxima*, par rapport à r, des amplitudes des oscillations, seront données par l'équation

$$3P' + 2k\frac{dP'}{dk} = 0, \quad (k)$$

qui remplacera l'équation (h) du n° 44.

Il serait facile de ramener P' à une intégrale simple; mais on peut aussi-bien, sans cela, réduire cette quantité en série ordonnée suivant les puissances de k; ce qui suffit pour déterminer par approximation les racines de l'équation (k).

(49) Pour effectuer cette réduction, je développe d'abord $cos.(ks.cos.\psi)$ suivant les puissances de k; je fais ensuite généralement

$$\int cos^{2n}\psi.d\psi = A_n, \quad \int (1-s^2)s^{2n+1}ds = B_n;$$

j'ai, de cette manière,

$$P' = (B_0 + mB_1)A_0 - (B_1 + mB_3)A_1 \cdot \frac{k^2}{1.2} + (B_2 + mB_3)A_2 \cdot \frac{k^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Or, en intégrant par parties, et ayant égard aux limites relatives à ψ et à s, on trouve

$$A_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot A_{n-1}, \quad B_n = \frac{n}{n+2} \cdot B_{n-1};$$

on a d'ailleurs

$$A_0 = \frac{\pi}{2}, \quad B_0 = \int (1-s^2)s\,ds = \frac{1}{4};$$

d'où l'on conclut pour P', une série dont le terme général est

$$\pm \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{m}{(n+2)(n+3)}\right)\frac{k^{2n}}{(2.4.6\ldots 2n)^2}.$$

En la substituant dans l'équation (k) et faisant $\frac{k^2}{4} = p$, cette équation devient

$$\frac{3}{2} - \frac{7p}{2.3} + \frac{11p^2}{(1.2)^2.3.4} - \frac{15p^3}{(1.2.3)^2.4.5} + \frac{19p^4}{(1.2.3.4)^2.5.6} - \text{etc.}$$
$$+ m\left(\frac{3}{2.3} - \frac{7p}{3.4} + \frac{11p^2}{(1.2)^2.4.5} - \frac{15p^3}{(1.2.3)^2.5.6} + \frac{19p^4}{(1.2.3.4)^2.6.7} - \text{etc.}\right) = 0.$$

Elle coïncide, comme cela doit être, avec l'équation (i), lorsque l'on fait abstraction de la série multipliée par m. On a trouvé, dans ce cas, pour la valeur approchée de la plus petite racine, $p = 1{,}8628$; on déterminera donc la correction de cette racine, relative à m, en faisant $p = 1{,}8628 + mx$, substituant cette valeur dans l'équation précédente et négligeant les puissances de mx supérieures à la première. On trouve en supprimant le facteur m, commun à tous les termes,

$$-(1{,}0071)x - 0{,}3809 = 0;$$

d'où l'on tire $x = -0{,}3782$, et par conséquent

$$p = \frac{k^2}{4} = 0{,}8628 - (0{,}3782)\, m.$$

Au moyen de cette valeur on aura, pour le mouvement de la première onde, en ne conservant toujours que la première puissance de m,

$$r = (0{,}3027)\big(1 + (0{,}0504)m\big)\, t\sqrt{gl}.$$

Cette quantité m représente le quarré du rapport du rayon l de la section *à fleur d'eau*, au diamètre horizontal $2a$ de l'ellipsoïde plongé; si le corps dont l'immersion a produit les ondes était un autre solide de révolution, il faudrait prendre pour $2a$ le diamètre horizontal de son ellipsoïde osculateur au point le plus bas du segment plongé; mais à raison de la petitesse du coëfficient 0,0504 qui multiplie m, on voit que la correction relative à la figure du corps plongé, sera généralement peu considérable; néanmoins il sera facile d'y avoir égard, et de cette manière on pourra appliquer nos formules à des cas où ce corps aura été très-sensiblement enfoncé dans le fluide.

Dans les expériences de M. Biot, cette correction diminue les temps calculés, et les rapproche par conséquent des temps observés, mais d'une quantité qui ne mérite pas qu'on y ait égard; car elle ne s'élève qu'à 0″,04 dans la quatrième expérience où elle est la plus considérable.

§. VII.

Propagation du mouvement dans l'intérieur du fluide, en ayant égard à ses trois dimensions.

(50) Nous nous bornerons, comme dans le § IV, à considérer les points situés dans l'axe des z, à une profondeur très-considérable par rapport au diamètre de l'ébranlement primitif. De plus nous exclurons le cas où gt^2 est devenu très-grand par rapport à z; cas qui se rapporte aux vîtesses finales des molécules, et que nous avons examiné pour toute l'étendue de la masse fluide, dans le n° 36. De cette manière il sera permis de négliger ρ dans les quantités k et k de ce numéro, et de les réduire l'une et l'autre à z; en même temps les quantités Y et Y′ deviendront aussi égales entre elles, et l'on aura

$$Y = \frac{\sqrt{g}}{2z} e^{-\frac{gt^2}{4z}} \int e^{\frac{gt^2}{4z}} dt.$$

Comme cette valeur est indépendante de α, β et ω, les intégrations relatives à ces variables, qui sont indiquées dans l'équation (c) du même numéro, s'effectueront immédiatement; je fais donc

$$\iint f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = A;$$

de sorte que A exprime la valeur du segment dont l'immer-

sion a produit l'ébranlement primitif; j'intégre depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=\frac{\pi}{2}$: l'équation (c) devient

$$\varphi=-\frac{A}{\pi\sqrt{g}}\cdot\frac{d^2Y}{dt^2}.$$

En observant que par la nature de l'intégrale définie que Y représente (n° 36), on a identiquement

$$g\frac{dY}{dz}=\frac{d^2Y}{dt^2},$$

il en résulte que la vîtesse verticale, déduite de cette valeur de φ, pourra s'écrire ainsi :

$$\frac{d\varphi}{dz}=-\frac{A}{\pi g\sqrt{g}}\cdot\frac{d^4Y}{dt^4};$$

ou bien, en mettant pour Y sa valeur,

$$\frac{d\varphi}{dz}=-\frac{Ag}{8\pi z^3}\left(5t-\frac{gt^3}{2z}+\left(3-\frac{3gt^2}{z}+\frac{g^2t^4}{4z^2}\right)e^{-\frac{gt^2}{4z}}\int e^{\frac{gt^2}{4z}}dt\right). \quad (l)$$

L'instant du *maximum* de cette vîtesse par rapport au temps sera déterminé par l'équation $\frac{d^5Y}{dt^5}=0$, qui devient, après la substitution de Y,

$$8-\frac{9gt^2}{2z}+\frac{g^2t^4}{4z^2}-\left(\frac{15gt}{2z}-\frac{5g^2t^3}{2z^2}+\frac{g^4t^5}{8z^3}\right)e^{-\frac{gt^2}{4z}}\int e^{\frac{gt^2}{4z}}dt=0.$$

Tirant de là la valeur de $e^{-\frac{gt^2}{4z}}\int e^{\frac{gt^2}{4z}}dt$, la substituant dans l'équation précédente, et désignant par V la grandeur de la vîtesse *maxima*, on trouve

$$V = -\frac{3A\sqrt{g}}{\pi z^2\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{(15 - 20q + 4q^2)\sqrt{q}}, \quad (m)$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{gt^2}{4z} = q.$$

Lorsque cette quantité q sera déterminée numériquement au moyen de l'équation du *maximum*, on la substituera dans la valeur de V; et l'on voit que cette vîtesse sera proportionnelle au volume A du segment plongé, et en raison inverse de la puissance $\frac{5}{2}$ de la profondeur z.

Si, à un instant quelconque, on désigne par u, la distance d'une des molécules que nous considérons, à sa position initiale, laquelle distance sera positive ou négative, selon que la molécule se sera abaissée ou élevée, on aura

$$u = \int \frac{d\varphi}{dz} dt = -\frac{A}{\pi g\sqrt{g}} \cdot \frac{d^2Y}{dt^2} + C;$$

C étant une constante qu'on déterminera de manière qu'on ait $u = 0$ quand $t = 0$. Substituant la valeur de Y, on a

$$u = -\frac{Agt}{8\pi z^3}\left(t + \left(3 - \frac{gt^2}{2z}\right) e^{-\frac{gt^2}{4z}} \int e^{\frac{gt^2}{4z}} dt\right).$$

Si la distance u répond à un position extrême de la molécule, où elle est un moment stationnaire, et où sa vîtesse est nulle, le temps t devra être déterminé par l'équation

$$5t - \frac{gt^3}{2z} + \left(3 - \frac{3gt^2}{z} + \frac{g^2t^4}{4z^2}\right) e^{-\frac{gt^2}{4z}} \int e^{\frac{gt^2}{4z}} dt = 0:$$

en en déduisant la valeur de $e^{-\frac{gt^2}{4z}}\int e^{\frac{gt^2}{4z}}dt$, pour la substituer dans celle de u, on aura

$$u = -\frac{2A}{\pi z^2}\cdot\frac{q^2-3q}{3-12q+4q^2};$$

q représentant toujours la quantité $\frac{gt^2}{4z}$ dont la valeur numérique sera donnée par l'équation précédente. Cette valeur de u représente les plus grandes excursions de la molécule située à la profondeur z, soit en s'élevant, soit en s'abaissant; et l'on voit qu'elles sont proportionnelles à A, et qu'elles suivent la raison inverse du quarré de cette profondeur.

Il ne reste plus maintenant qu'à déterminer les valeurs approchées de la quantité q; mais pour cela il est nécessaire de réduire en séries les équations dont elles dépendent.

(51) Je mets dans la valeur de Y, sous le signe intégral, tv à la place de t; et faisant toujours $\frac{gt^2}{4z}=q$, il vient

$$Y=\sqrt{\frac{g}{z}}\cdot e^{-q}\int e^{qv^2}dv;$$

l'intégrale étant prise depuis $v=0$ jusqu'à $v=1$. Je développe l'exponentielle e^{qv^2}; j'intégre ensuite entre ces limites, ce qui donne

$$Y=\sqrt{\frac{q}{z}}\cdot e^{-q}\left(1+\frac{q}{3}+\frac{q^2}{2.5}+\frac{q^3}{2.3.7}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{q^n}{2.3\ldots n.2n+1}+\text{etc.}\right).$$

Substituant cette série dans l'équation (l), et observant

qu'au lieu de différencier Y quatre fois de suite par rapport à t, il est plus simple de le différencier deux fois de suite par rapport à z, et de multiplier le résultat par g^2, on trouve

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{2A\sqrt{gq}}{\pi z^2\sqrt{z}}\cdot e^{-q}\left(1 - q + \frac{q^2}{10} + \frac{q^3}{210} + \frac{q^4}{2528} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{3q^n}{2.3.4\ldots n.\,2n-3.\,2n-1.\,2n+1} + \text{etc.}\right).$$

L'instant de la vîtesse nulle sera donc déterminée par l'équation

$$1 - q + \frac{q^2}{10} + \frac{q^3}{210} + \frac{q^4}{2520} + \frac{q^5}{27720} + \text{etc.} = 0\,;$$

or, il est évident qu'elle ne peut avoir que deux racines positives; d'où il résulte qu'il n'y a que deux époques où la molécule fluide soit un moment stationnaire.

La plus petite de ces deux racines est comprise entre 1 et 2; on trouve, pour sa valeur approchée,

$$q = \frac{gt^2}{4z} = 1{,}1369\,;$$

d'où l'on conclut pour la première époque où la molécule est stationnaire, et pour sa distance à sa position initiale,

$$t = (2{,}1326)\sqrt{\frac{z}{g}},\quad u = -(0{,}2464)\frac{A}{z^2}.$$

La seconde racine de cette équation est comprise entre 5 et 6; sa valeur est à-peu-près $q = 5{,}72$; et l'on a pour l'instant de la seconde station, et pour la position de la molécule à cet instant,

$$t = (4{,}7834)\sqrt{\frac{z}{g}},\quad u = +(0{,}2174)\frac{A}{z^2}.$$

La première valeur de u exprime la plus grande élévation

de la molécule qui répond à la profondeur z; la seconde marque son plus grand abaissement; la somme de ces quantités, prises en faisant abstraction du signe, c'est-à-dire $(0,4638)\frac{A}{z^3}$, exprime le trajet de cette molécule d'une position à l'autre. Après qu'elle a atteint sa position inférieure, elle remonte jusqu'à ce que son mouvement soit achevé; en sorte que sa dernière vitesse doit être ascensionnelle, ainsi que nous l'avons trouvé effectivement dans le nº 36. Il est à remarquer que lorsqu'il s'agit d'un canal d'une largeur constante, les molécules situées au-dessous de l'ébranlement primitif, montent d'abord, descendent ensuite, mais ne remontent plus comme dans le cas que nous examinons maintenant (nº 27).

Il résulte de ce mouvement que la vitesse verticale doit avoir trois *maxima :* l'un négatif, avant que la molécule fluide n'ait atteint sa plus grande élévation; le second positif, après qu'elle a passé ce point et pendant qu'elle descend; le troisième, négatif, lorsqu'elle remonte au-dessus du point le plus bas de sa course. C'est en effet ce que nous allons vérifier.

(52) En différentiant, par rapport à t, la valeur en série de $\frac{d\varphi}{dz}$; égalant le résultat à zéro, et supprimant ensuite l'exponentielle e^{-q} qui se trouve facteur à tous les termes, on a, pour déterminer l'instant du *maximum* de cette vitesse, par rapport au temps,

$$1 - 5q + \frac{5q^2}{2} - \frac{q^3}{6} - \frac{q^4}{168} - \frac{q^5}{2520} - \frac{q^6}{33264} - \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots - \frac{15q^n}{2.3\ldots n.2n-5.2n-3.2n-1} - \text{etc.} = 0.$$

Or, cette équation n'ayant que trois variations de signes, elle ne peut avoir au plus que trois racines réelles et positives : elle en a affectivement trois dont voici les valeurs approchées :

On trouve, pour la plus petite,

$$q = \frac{gt^2}{4z} = 0,2247.$$

La valeur de t qu'on en déduit est moindre que celle qui répond à la première station que nous venons de déterminer ; et l'on a pour la profondeur à laquelle a lieu le premier *maximum* de vîtesse, à un instant donné,

$$z = (2,2252)\frac{gt^2}{2};$$

en sorte que ce *maximum* se propage d'un mouvement uniformément accéléré, sous une vîtesse qui surpasse le double de celle des corps pesans. La grandeur de ce même *maximum*, déduite de l'équation (m), est

$$V = -(0,1899)\frac{A\sqrt{g}}{z^2\sqrt{z}}.$$

La seconde racine de notre équation est comprise entre 2 et 3; sa valeur approchée est $q = 2,1529$; d'où l'on conclut

$$t = (2,9346)\sqrt{\frac{g}{z}}, \quad z = (0,2322)\frac{gt^2}{2};$$

ce qui montre que le second *maximum* de vîtesse a lieu entre les deux stations de la molécule fluide, et qu'il se propage avec une accélération qui n'est pas le quart de celle des corps pesans. Ce second *maximum* doit être une quantité positive; et, en effet, on a d'après l'équation (m),

$$V = +(0{,}0684)\frac{A\sqrt{g}}{z^2\sqrt{z}},$$

Enfin, après quelques essais, on trouve que la troisième racine est comprise entre 7 et 8; et si l'on prend $q=7,5$, on en conclut pour l'instant du troisième *maximum*, et pour la profondeur à laquelle il a lieu,

$$t=(5{,}4773)\sqrt{\frac{z}{g}}, \quad z=\frac{gt^2}{30}.$$

Il a donc lieu, en effet, après la seconde station dont nous avons déterminé l'époque dans le numéro précédent; il se propage sous une vîtesse qui n'est que le 15e de celle de la pesanteur; et quant à sa grandeur, qui doit être négative, l'équation (m) donne

$$V = -(0{,}0022)\frac{A\sqrt{g}}{z^2\sqrt{z}}.$$

Si l'on y met pour z sa valeur en fonction t, on a

$$V = -(10{,}8105)\frac{A}{g^2t^5},$$

où l'on voit que cette vîtesse surpasse, comme cela doit être, la vîtesse finale trouvée dans le n° 36, laquelle est, en la réduisant à son premier terme,

$$\frac{d\varphi}{dz} = -(7{,}6394)\frac{A}{g^2t^5}.$$

MÉMOIRE

Sur l'écoulement linéaire de diverses substances liquides par des tubes capillaires de verre.

PAR M. GIRARD.

Lu à l'Académie le 12 janvier 1817.

L'ACTION que la surface de la paroi intérieure des tubes capillaires de cuivre exerce sur l'eau qui s'y meut d'un mouvement linéaire, fait adhérer à cette surface une couche fluide plus ou moins épaisse, suivant que la densité de ce fluide augmente ou diminue, c'est-à-dire suivant que sa température s'abaisse ou s'éleve. Et c'est par l'effet de cette action que s'expliquent naturellement tous les phénomènes de l'écoulement linéaire de l'eau élevée à différentes températures, comme je l'ai montré dans le Mémoire que j'ai eu l'honneur de lire à l'Académie au mois de mai dernier.

Je me propose aujourd'hui de confirmer cette explication par le compte que je vais rendre d'une nouvelle suite d'expériences faites sur le mouvement linéaire de différens fluides dans des tubes capillaires de verre.

Les liquides que j'ai soumis à l'épreuve se divisent en deux classes. La première comprend ceux qui jouissent de la propriété de mouiller le verre, ou d'adhérer à sa surface ; la

seconde ceux qui étant mis en contact avec cette substance, ne sont susceptibles de contractèr aucune adhérence avec elle.

Je vais exposer séparément dans deux sections les observations dont ces deux classes de liquides ont été l'objet.

SECTION PREMIÈRE.

Observations faites sur l'écoulement linéaire des liquides susceptibles de mouiller la surface du verre.

En décrivant les divers appareils dont j'ai fait usage pour déterminer l'influence de la température, sur les produits de l'écoulement linéaire de l'eau, j'ai dit que le niveau de ce liquide dans le réservoir alimentaire était entretenu constamment à la même hauteur au-dessus de l'orifice du tube par lequel il s'écoulait : mais le maintien de ce niveau constant exige, comme on l'a vu, des précautions qui compliquent les procédés de l'observation et en rendent le résultat plus difficile à saisir. Il était donc important pour faciliter les nouvelles recherches que je me proposais, de commencer par simplifier ces appareils et de m'affranchir, s'il était possible, de la nécessité d'établir au-dessus du vase qui porte le tube capillaire, un second réservoir destiné à entretenir au même niveau la surface du fluide dans le vase.

Or la formule qui exprime la linéarité de l'écoulement d'un fluide susceptible de mouiller les parois du tube où il se meut, conduit directement à la simplification que je cherchais. Je vais indiquer d'abord comment on y parvient.

Rappelons-nous qu'en faisant :

La gravité terrestre $= g$,

De diamètre effectif du tube $=$ D,

La hauteur de la charge, au-dessus de l'orifice de sortie, $= h$,

La longueur du tube $= l$,

Le coëfficient constant donné par l'expérience $= a$,

La vîtesse du fluide dans le tube $= u$,

La formule dont il s'agit est celle-ci :

$$g \frac{Dh}{4la} = u.$$

Laquelle indique que la vîtesse d'écoulement est proportionnelle à la hauteur de la charge.

Si donc on suppose que le réservoir, au lieu d'être entretenu plein à une hauteur déterminée, se vide par le tube sans recevoir de nouveau fluide, la surface de celui qu'il contient s'abaissera suivant une certaine loi dépendante de la forme de ce réservoir, et quoique dans cette hypothèse, la vîtesse d'écoulement varie à chaque instant, elle restera néanmoins toujours proportionnelle à chaque instant à la hauteur de la charge et le mouvement continuera d'être linéaire dans le tube.

Puisque dans le même instant il s'écoule par ce tube une quantité de liquide égale à celle qui passe par une section transversale quelconque du réservoir, il est aisé de substituer à la vîtesse d'écoulement u, la vîtesse V avec laquelle descend pendant le même temps la surface supérieure du fluide, contenu dans le réservoir. Ainsi nommant X' cette surface horizontale lorsqu'elle correspond à une hau-

teur quelconque Y, on aura évidemment $VX^2 = uD^2$ et par conséquent $u = \frac{VX^2}{D^2}$ valeur qui, substituée dans la formule générale, la change en celle-ci :

$$\frac{gD^2Y}{4X^2la} = V,$$

laquelle exprime la relation entre la hauteur de la charge et la vîtesse d'abaissement de la surface du fluide dans le réservoir, puisque la valeur de X^2 est donnée en Y par la figure de ce réservoir.

Par exemple, ce vase étant supposé un cône renversé, au sommet duquel le tube d'écoulement soit implanté, la section horizontale X^2 de ce cône, correspondante à la hauteur Y sera proportionnelle au quarré Y^2 de cette hauteur, et l'on aura, pour ce cas particulier, m étant un rapport constant,

$$g\frac{D^2mY}{4laY^2} = g\frac{mD^2}{4laY} = V,$$

c'est-à-dire qu'alors la vîtesse d'abaissement de la surface du fluide dans le réservoir est en raison inverse de la hauteur de la charge.

Si l'on supposait en second lieu que le réservoir fut un paraboloïde renversé, au sommet duquel serait placé le tube capillaire par lequel l'eau s'écoule, on aurait, en appelant p le paramètre de la parabole génératrice $X^2 = pY$, et la formule deviendrait

$$g\frac{D^2}{4lap} = V,$$

d'où l'on voit que la vîtesse d'abaissement de la surface du

liquide serait constante, et toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse du paramètre p.

Enfin, si ce réservoir est supposé cylindrique ou prismatique, et sa section constante $=A'$, l'on a pour le cas particulier

$$g\frac{D'Y}{4A'la}=V.$$

La vîtesse d'abaissement de la surface du fluide dans le réservoir est donc, comme la vîtesse d'écoulement linéaire dans le tube, proportionnelle à chaque instant à la hauteur de la charge.

Maintenant que l'on conçoive l'écoulement compris entre deux limites déterminées de telle sorte que la hauteur de la charge qui au commencement de cet écoulement était représenté par h', se trouve à la fin représenté par h'', la quantité de mouvement de chaque tranche superficielle, considérée à une hauteur quelconque y au-dessus de l'orifice, sera exprimée par

$$-VA'dy=-g\frac{D'A'y.dy}{4A'la},$$

et l'on aura généralement pour la somme des quantités de mouvement de cette tranche, dans les positions successives qu'elle occupe,

$$-\int g\frac{D'A'y\,dy}{4A'la}=-g\frac{D'y^2}{2.4la}+C.$$

La constante C est telle que cette intégrale s'évanouisse à l'origine du mouvement lorsque $y=h'$, on a, par conséquent,

$$C=g\frac{D'h'h'}{2.4la},$$

et la somme des quantités de mouvement que l'on vient de trouver est complète lorsque $y = h''$, donc enfin elle a pour expression

$$g\frac{D^2}{4la}\left(\frac{h'h' - h''h''}{2}\right);$$

mais il est clair que cette quantité de mouvement est égale à la masse du fluide qui s'est écoulée entre les limites h' et h'', multipliée par une certaine vîtesse moyenne V', c'est-à-dire à

$$A^2 V' (h' - h'');$$

on a donc l'équation

$$A^2 V' (h' - h'') = g\frac{D^2}{4la}\left(\frac{h'h' - h''h''}{2}\right),$$

ou bien

$$V' = g\frac{D^2}{4A^2 la}\left(\frac{h' + h''}{2}\right),$$

d'où l'on tire, en substituant à la vîtesse moyenne V' applicable à la section horizontale du réservoir, la vîtesse moyenne u' applicable à la section transversale du tube,

$$u' = g\frac{D}{4la}\left(\frac{h' + h''}{2}\right);$$

donc la vîtesse moyenne d'écoulement dans le tube est proportionnelle à la demie somme des hauteurs h' et h'' correspondantes au commencement et à la fin de l'écoulement, c'est-à-dire que l'écoulement a lieu entre ces limites comme si le vase cylindrique, qui sert de réservoir, était entretenu constamment plein à la hauteur $\frac{h' + h''}{2}$.

Appelant Q la quantité de fluide qui s'écoule par seconde, et π le rapport de la circonférence au diamètre, on a, comme on sait, $\frac{4\,Q}{\pi D^2} = u'$.

Ainsi, substituant à u' cette valeur dans la formule précédente elle deviendra

$$g\frac{\pi D^2}{16.lQ}\left(\frac{h'+h''}{2}\right)=a$$

au moyen de laquelle il sera facile de déterminer le coëfficient a comme si le réservoir était entretenu constamment plein.

On voit par là, que pour parvenir à la détermination dont il s'agit, il suffit de faire écouler le liquide en expérience d'un réservoir cylindrique ou prismatique, sans qu'il soit nécessaire, par une addition continuelle de liquide, d'en maintenir le niveau à une hauteur constante : appareil analogue à celui employé par M. le professeur Gerstner et que nous avons décrit ailleurs.

Voici la description de celui dont nous nous sommes servis.

C'est un vase cylindrique de laiton, ayant 0^m245 de hauteur, et 0^m076 de diamètre intérieur.

A 5 millimètres de son bord supérieur, sont ménagées deux échancrures servant de déversoirs par lesquels s'écoule le trop plein du liquide dont on le remplit, de sorte que la surface de ce liquide ne peut jamais être élevée que de 24 centimètres au-dessus du fond du vase au commencement de chaque expérience.

Ce réservoir cylindrique est soutenu verticalement sur un trépied de 15 centimètres environ au-dessus de la table qui porte tout l'appareil.

La paroi de ce cylindre est percée suivant une ligne verticale de cinq orifices. Le plus élevé est à 6 centimètres au-dessous des bords du vase; le suivant à 5 centimètres plus

bas, et ainsi de suite, de 5 centimètres en 5 centimètres, jusqu'au cinquième orifice qui se trouve ainsi à 21 centimètres au-dessous de la surface du liquide lorsque le réservoir en est rempli.

Ces orifices sont fermés de bouchons de cuivre à vis auxquels on peut substituer successivement des viroles de même métal, portant le même pas, et ajustées à l'une des extrémités des tubes qui doivent servir aux expériences. Celles dont nous allons d'abord exposer les résultats ont été faites avec un tube de verre de $0^{m}939$ de longueur, et de $0^{m}001767$ de diamètre. Il a été implanté sur l'orifice inférieur du réservoir, c'est-à-dire à 21 centimètres au-dessous de la surface du fluide, au commencement de chaque observation, et dressé de manière que ses deux extrémités se trouvassent parfaitement de niveau.

Le produit de l'écoulement a été reçu dans un quart de litre étalonné dont la capacité a été remplie exactement à chaque expérience; de sorte qu'à l'instant où elle se terminait, la hauteur du liquide, au-dessus du centre de l'orifice du tube, n'était plus dans notre cylindre que de $0^{m}1549$. La charge moyenne était donc représentée par $\frac{0,2100 + 0,1549}{2} = 0^{m}1824$, hauteur à laquelle on peut supposer que la surface du liquide était constamment entretenue pendant la durée de l'observation.

Il est plus important qu'il ne le paraît peut-être au premier aperçu d'indiquer les dimensions exactes de toutes les parties de l'appareil dont on a fait usage, car les phénomènes observés n'ayant lieu que pour des tubes de certaines dimensions, et lorsque le mouvement est devenu essentiel-

lement linéaire, il faut, si l'on veut obtenir des résultats parfaitement identiques, faire les expériences dans des circonstances qui soient absolument les mêmes.

ARTICLE PREMIER.

Expériences faites avec le tube n° 1, *de* 0m939 *de longueur, et de* 0m001767 *de diamètre.*

Notre dessein étant de comparer entre eux les temps de l'écoulement d'un volume constant de différens liquides par le même tube et sous les mêmes charges, nous avons dressé pour chacun de ces liquides un tableau d'observations divisé en trois colonnes.

La première indique le numéro de l'expérience;

La deuxième le degré de température du liquide;

Enfin la troisième le nombre de secondes employé pour remplir le quart de litre qui servait de jauge commune.

Les liquides susceptibles de mouiller le verre, qui ont été mis en expérience sont: l'eau pure, l'alcool, la dissolution de sucre dans l'eau en différentes proportions, l'huile de térébenthine, le vinaigre blanc pur et affaibli d'eau, les dissolutions à différens degrés de concentration de muriate de soude, de sulfate de soude, et de nitrate de potasse. Nous allons présenter dans autant de paragraphes les observations faites sur chacun de ces différens liquides.

§. Ier.

Expériences sur l'écoulement de l'eau pure.

Charge moyenne au-dessus de l'orifice du tube 0^m1824;
Longueur du tube 0^m939;
Diamètre du tube 0.001767;

TABLEAU N° I.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	0.	1036".
2.	1.	999.
3.	2.	975.
4.	4.	911.
5.	6.	855.
6.	9.	802.
7.	11.	752.
8.	17.	647.
9.	28.	502.
10.	30.	486.
11.	41 $\frac{1}{4}$.	405.
12.	51 $\frac{1}{2}$.	346.
13.	60.	306.
14.	70.	275.
15.	75.	260.
16.	80.	252.
17.	90.	246.

Le tableau n° 1 présente les résultats des observations qui ont été faites sur l'écoulement de l'eau pure; elles sont au nombre de dix-sept et comprises entre 0 et 90 degrés de température du thermomètre centigrade; à zéro de température le quart de litre a été rempli en 1036 secondes. Cette durée diminue rapidement à mesure que la température s'élève. Elle n'est plus que de 502 secondes à 28 degrés du thermomètre. Enfin à 90 degrés, il ne faut plus que 246 secondes pour l'écoulement du même volume. Ainsi, soit que l'on emploie des tubes de verre, soit que l'on emploie des tubes de cuivre semblables à ceux avec lesquels nos premières observations ont été faites, le temps nécessaire pour remplir d'eau une capacité donnée, la température de ce liquide étant à zéro, est plus que quadruple de celui pendant lequel l'écoulement doit avoir lieu pour remplir la même capacité lorsque la température est à 90 degrés ou très-voisine du terme de l'ébullition.

Nous avons dit ailleurs que l'influence de la température ne se manifestait que dans les circonstances où le mouvement du liquide mis à l'épreuve était parvenu à la linéarité dans un tube d'une longueur convenable : il est à propos de rappeler ici les observations qui le prouvent.

J'ai substitué au tube de verre employé pour les expériences du tableau précédent, un orifice du même diamètre, pratiqué dans une mince paroi de cuivre. Le réservoir cylindrique ayant ensuite été rempli d'eau à 4 degrés de température, j'ai reçu dans un quart de litre le produit de l'écoulement par cet orifice.

Ce vase a été exactement rempli en 60 secondes ainsi que je m'en suis assuré par cinq expériences consécutives qui n'ont présenté aucune différence entre elles.

Ne changeant rien aux dispositions de l'appareil, il a été rempli d'eau échauffée à 76 degrés, et l'écoulement d'un quart de litre a eu lieu en 59 secondes.

On a laissé descendre la température à 60 degrés, et la durée de l'écoulement du quart de litre est restée la même. D'où l'on voit que la durée de l'écoulement d'un même volume d'eau par un orifice capillaire en mince paroi, est sensiblement indépendante de la température de ce liquide, tandis que lorsqu'il s'écoule sous la même charge par un tube capillaire du même diamètre, et d'une longueur telle que la linéarité du mouvement y soit établie, les durées de l'écoulement d'un volume déterminé d'eau à 1 degré et à 76 degrés du thermomètre varient dans le rapport de 100 à 26, ou de 4 à 1 environ.

Ces faits suffiraient pour établir d'une manière bien tranchée les caractères qui distinguent l'écoulement d'un liquide par des orifices en mince paroi de celui qui a lieu par des tubes capillaires de même ouverture, quand d'ailleurs on ne saurait pas depuis long-temps que les produits du premier, correction faite de la contraction, se calculent rigoureusement d'après les théories de Toricelli et de Newton; tandis que les produits du second ne peuvent se calculer que d'après les lois du mouvement linéaire dont Euler a donné le premier les formules.

On s'exposerait donc à de grandes méprises, si en s'occupant de cette matière, qui paraît avoir fixé depuis quelque temps l'attention des physiciens, on perdait de vue les deux espèces d'écoulement, et si l'on concluait des phénomènes observés dans l'un, ceux qui doivent se manifester dans l'autre.

§. II.

Expériences sur l'écoulement de l'alcool, et de l'alcool mélangé d'eau.

Il paraît d'abord si naturel d'expliquer l'influence de la température sur les produits de l'écoulement linéaire, par l'augmentation de fluidité que le liquide acquiert à mesure qu'il s'échauffe, que ma première idée fut de soumettre aux mêmes épreuves pour vérifier cette conjecture, un liquide que les physiciens se sont accordés jusqu'à-présent à regarder comme doué d'une liquidité beaucoup plus parfaite que celle de l'eau. Je remplis en conséquence d'alcool le réservoir cylindrique de mon appareil, et l'ayant laissé armé du même orifice en mince paroi que celui dont il vient d'être question, je reçus dans un quart de litre le produit de l'écoulement.

La température de cet alcool était à 5 degrés au-dessus de zéro et il marquait 28 degrés $\frac{1}{2}$ à l'aréomètre.

Je trouvai par cinq observations consécutives entre lesquelles la plus grande différence ne fut que d'une seconde, qu'il fallait 54 secondes $\frac{2}{5}$ pour emplir le quart de litre; ainsi on conclurait de ces expériences que l'écoulement de l'alcool par un orifice capillaire serait plus rapide que celui de l'eau par le même orifice.

Ayant ensuite élevé à 44 degrés la température de l'alcool, il marquait 32 degrés à l'aréomètre et l'on trouva de 58 secondes la durée de l'écoulement d'un quart de litre; six observations consécutives faites dans l'intervalle de 44° à 31° de l'échelle thermométrique donnèrent précisément le même temps pour la durée de cet écoulement.

Ces expériences semblent prouver que l'élévation de température de l'alcool augmente la durée de son écoulement lorsqu'il a lieu par un orifice en mince paroi; singularité remarquable qu'il convient néanmoins de constater par de nouvelles observations.

Quoi qu'il en soit, on voit que l'influence de la température de l'alcool sur la durée de son écoulement par de tels orifices est toujours très-peu sensible. On voit de plus que les produits de l'écoulement de cette liqueur et de l'eau pure, lorsque l'une et l'autre sont échauffées de 40 à 60 degrés, sont sensiblement les mêmes.

Recherchons maintenant ce qui arrive lorsque l'écoulement de l'alcool devient linéaire dans un tube.

L'orifice en mince paroi qui avait servi aux expériences précédentes fut remplacé par le tube capillaire de verre que nous avions déja employé; le réservoir cylindrique fut rempli d'alcool et ayant fait varier la température de ce liquide, on obtint sur la durée de l'écoulement d'un quart de litre les observations que présente le tableau suivant :

TABLEAU N° II.

Alcool.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	— 3 $\frac{1}{4}$.	3099 ″.
2.	— 2 $\frac{1}{2}$.	3044.
3.	— 2.	2980.
4.	0.	2750.
5.	3.	2489.
6.	7.	2170.
7.	10.	1920.
8.	17 $\frac{1}{2}$.	1508.
9.	27 $\frac{1}{2}$.	1170.
10.	45.	910.
11.	59.	763.
12.	69.	643.

L'alcool dont je me suis servi n'avait point été rectifié. Il indiquait à zéro de température 30 degrés de l'aréomètre.

Je fis ces expériences le 25 janvier 1815 ; la température de la liqueur étant à 3 degrés $\frac{1}{4}$ au-dessous de zéro, le quart de litre ne fut rempli que dans l'espace de 3099 secondes.

Il fallut 2750 secondes pour remplir le même vase, l'alcool étant à zéro de température; enfin il fut rempli en 643 secondes lorsque cette liqueur eut été élevée à 69 degrés, terme auquel nos observations s'arrêtèrent.

Le tableau qui en présente les résultats indique la loi que suivent douze expériences comprises entre — 3 degrés $\frac{1}{4}$ et 69 degrés. On y reconnaît que le temps de l'écoulement d'un même volume d'alcool diminue avec beaucoup plus de rapidité dans les degrés inférieurs de l'échelle thermométrique que dans les degrés supérieurs : cette loi est analogue à celle de la variabilité de l'écoulement de l'eau déja observée Mais, contre notre attente, le temps employé à remplir d'alcool un quart de litre a été beaucoup plus long que celui employé sous la même charge et à la même température à remplir d'eau la même capacité. Ainsi à zéro de température, par exemple, il a fallu 2750 secondes pour l'écoulement d'un quart de litre d'alcool tandis que tout égal d'ailleurs, l'écoulement du même volume d'eau n'a exigé que 1036 secondes.

De même à 70 degrés du thermomètre les mêmes volumes d'alcool et d'eau s'écoulent, le premier en 643″, et le second en 246″ seulement. Or le verre est, comme on sait, susceptible d'être parfaitement mouillé par l'alcool, de sorte qu'un filet de cette liqueur en mouvement dans le tube glisse sur une couche du même fluide qui adhère aux parois de ce tube. Si donc, admettant l'opinion commune, on suppose la fluidité de l'alcool plus grande que celle de l'eau, c'est-à-dire ses molécules moins adhérentes entre elles, il faut que le filet d'alcool qui se meut, se détache plus facilement de la couche qui est immobile, ainsi il doit éprouver moins de résistance à se mouvoir, et par conséquent le produit de son écoulement en un temps donné doit être plus considérable que le produit de l'écoulement de l'eau. Mais c'est précisément le contraire qui arrive : la différence de fluidité spécifique

des deux liquides dont nous comparons ici le mouvement linéaire ne peut donc servir à rendre raison des phénomènes que ces mouvemens présentent, et il faut nécessairement en chercher l'explication dans une autre cause.

Cette cause est la différence d'action que la surface des parois intérieures du tube de verre exerce à températures égales sur l'alcool et sur l'eau. Cette action s'étendant à une plus grande distance sur la première de ces liqueurs que sur la seconde, il arrive, lorsque le mouvement a acquis sa linéarité que la couche d'alcool qui tapisse le tube intérieurement est plus épaisse que la couche d'eau qui lui reste adhérente dans les mêmes circonstances, d'où il suit que l'alcool se meut en effet dans un tube d'une ouverture plus petite que celui par lequel l'eau s'écoule, ce qui rend nécessairement dans le premier cas le produit de l'écoulement moindre que dans le second.

Après avoir reconnu par les observations dont je viens de rendre compte la différence d'action de la surface du verre sur l'eau et sur l'alcool, j'ai voulu voir comment, en mélangeant ces deux liquides dans certaines proportions, on faisait varier cette action.

TABLEAU N° III.

Mélange de $\frac{1}{3}$ d'alcool. à 30 degrés, et de $\frac{2}{3}$ d'eau.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	8 $\frac{1}{4}$.	1647 ″.
2.	20 $\frac{2}{5}$.	1055.
3.	30.	800.
4.	40.	633.
5.	50.	510.
6.	60.	433.

Le tableau n° III présente les résultats de dix observations faites sur un mélange de $\frac{2}{3}$ d'eau et d'un tiers d'alcool en volume. Ces observations sont comprises entre 8 degrés $\frac{1}{4}$ et 60 degrés de l'échelle thermométrique.

Si on les compare aux observations faites sur l'alcool pur, on voit que les temps de l'écoulement d'un quart de litre aux mêmes degrés de température sont beaucoup moindres.

Ainsi à 20 degrés et à 60 degrés, par exemple, il a fallu 1055 et 433 secondes pour l'écoulement d'un quart de litre de ce mélange, tandis que le même volume d'alcool ne s'est écoulé, aux mêmes degrés de température, qu'en 1400 secondes et en 750 secondes environ.

Comparant de même les durées d'écoulement de ce mélange avec les durées de l'écoulement de l'eau pure, on voit qu'à 30 et à 60 degrés du thermomètre un quart de litre du

premier liquide s'écoule en 800 et en 433 secondes, tandis que l'écoulement du même volume d'eau s'opère en 486 et en 306 secondes.

On voit, par la comparaison de ces expériences, que la surface du verre exerce sur un mélange d'eau et d'alcool une action moindre que celle qu'elle exerce sur cette dernière liqueur, et plus grande que celle qu'elle exerce sur l'eau.

J'ai mélangé ensuite $\frac{3}{4}$ d'eau en volume avec $\frac{1}{4}$ d'alcool, et, ayant fait varier la température de ce mélange depuis 6 degrés jusqu'à 70, j'ai obtenu les résultats qui sont exposés dans le quatrième tableau.

TABLEAU N° IV.

Mélange de $\frac{1}{4}$ d'alcool à 30 degrés et de $\frac{3}{4}$ d'eau.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	6.	1431.
2.	20.	918.
3.	30.	692.
4.	40.	545.
5.	50.	447.
6.	60.	375.
7.	70.	332.

On voit qu'à 20 et à 60 degrés, il n'a fallu que 918 et 375 secondes pour l'écoulement d'un quart de litre tandis que la même dépense du mélange précédent n'a été faite qu'en 1055 et 433 secondes.

Il reste ainsi prouvé que l'action de la surface du verre sur des mélanges d'alcool et d'eau, diminue à mesure que l'eau entre dans ces mélanges en plus grande proportion, ou, ce qui est la même chose en d'autres termes, que l'épaisseur de la couche liquide qui mouille la surface du verre, et qui reste adhérente à la paroi intérieure de tube, devient plus considérable à mesure que l'alcool devient plus pur.

§. III.

Expériences sur l'écoulement de dissolutions de sucre à différents degrés de température.

Voulant m'assurer par de nouvelles observations que l'augmentation des produits de l'écoulement par un même tube n'était point dû seulement à un accroissement de fluidité des différens liquides, il m'a paru convenable de soumettre à l'épreuve une liqueur sensiblement visqueuse.

J'ai fait dissoudre en conséquence un $\frac{1}{2}$ kilogramme de sucre raffiné dans un litre $\frac{1}{2}$ d'eau. Cette dissolution mise en expérience, et élevée de 4 degrés $\frac{1}{2}$ à 80 degrés de température, a fourni huit observations dont les résultats sont consignés dans le tableau n° V.

TABLEAU N° V.

Dissolution d'un demi kilogramme de sucre dans un litre et demi d'eau.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	4 ½.	1947.
2.	10.	1704.
3.	20.	1281.
4.	30.	1009.
5.	40.	816.
6.	50.	667.
7.	60.	548.
8.	80.	406.

Choisissant dans ce tableau les expériences faites à 10 degrés et à 60 degrés de température, on voit qu'il a fallu 1704 et 548 secondes pour remplir le quart de litre, tandis que l'alcool pur, aux mêmes degrés du thermomètre, n'a fourni la même dépense qu'en 1920 et 750 secondes. Ainsi, quoique l'alcool soit regardé comme éminemment plus liquide que la dissolution de sucre presque sirupeuse dont il est question ici, le produit de l'écoulement de la première de ces liqueurs est moindre dans les mêmes circonstances et dans un temps donné que le produit de l'écoulement de la seconde; ce qui s'explique naturellement par ce que l'action de la surface du verre s'étend à une plus grande distance sur l'alcool que sur l'eau sucrée. L'intensité de cette action

ne dépend point au reste, comme on le voit, du plus ou moins de viscosité du liquide soumis à l'épreuve : proposition que nous aurons bientôt de nouvelles occasions de confirmer.

J'ai ensuite étendu dans un litre $\frac{1}{2}$ d'eau la dissolution précédente. Elle s'est trouvée ainsi contenir $\frac{1}{2}$ kilogramme de sucre sur trois litres d'eau; élevée de 8 à 80 degrés de température elle a fourni les 6 observations que présente le tableau n° VI.

TABLEAU N° VI.

Dissolution d'un demi-kilogramme de sucre dans trois litres d'eau.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	8 $\frac{1}{2}$.	1171.
2.	30.	699.
3.	40.	578.
4.	50.	483.
5.	60.	408.
6.	80.	312.

Ce tableau indique, qu'à températures égales, les temps de l'écoulement d'un quart de litre sont beaucoup moindres que ceux portés dans le tableau n° V, et qu'ils se rapprochent d'autant plus de ceux de l'écoulement de l'eau que l'on s'élève vers les degrés supérieurs de l'échelle thermométrique.

Les observations faites sur l'alcool et les dissolutions de sucre prouvent au surplus que la distance à laquelle l'action de la surface intérieure du tube sur différens liquides cesse de s'exercer, ne dépend point de leurs densités spécifiques; car on diminue également cette distance, soit que par l'addition de l'eau, on augmente dans un cas la densité de l'alcool, ou que l'on diminue dans un autre celle des dissolutions de sucre.

§. IV.

Expériences sur l'écoulement de l'huile de térébenthine.

J'ai choisi l'huile de térébenthine parmi les liquides visqueux que je pouvais mettre à l'épreuve; j'en ai rempli le réservoir cylindrique de l'appareil, et l'écoulement d'un quart de litre de cette substance s'opérant par la même tube de verre qui a servi aux expériences précédentes, j'en ai observé la durée à différentes températures comprises entre 19 degrés $\frac{1}{2}$ et 53 degrés. Le tableau n° VII en présente la serie.

TABLEAU N° VII.

Huile de térébenthine.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	19 $\frac{1}{2}$.	1335.
2.	24.	1203.
3.	27 $\frac{1}{2}$.	1143.
4.	37.	991.
5.	42 $\frac{1}{2}$.	941.
6.	48.	860.
7.	53 $\frac{1}{2}$.	830.

On voit qu'à 19 degrés ½ et à 53 degrés de l'échelle thermométrique les durées de l'écoulement ont été de 1335 et de 830 secondes, c'est-à-dire, comme il était aisé de le prévoir, beaucoup plus considérables que les durées de l'écoulement de l'eau, mais un peu moindres que celles de l'écoulement de l'alcool. Ainsi cette dernière liqueur à laquelle les physiciens ont attribué une fluidité presque parfaite, donne en temps égaux des produits d'écoulement plus faibles que ceux de l'huile de térébenthine qui a été regardée généralement comme un liquide visqueux.

§. V.

Expériences sur l'écoulement du vinaigre et du vinaigre étendu d'eau.

Après avoir éprouvé l'eau, l'alcool et quelques liquides visqueux fournis par le règne végétal, il restait à répéter des observations analogues sur une liqueur acide prise dans le même règne, j'ai rempli en conséquence le réservoir de notre appareil de vinaigre blanc tel qu'on le trouve dans le commerce; le tableau nº VIII présente les résultats de douze expériences qui embrassent l'intervalle thermométrique compris depuis — 2 degrés ½ au-dessous de zéro jusqu'à 80 degrés au-dessus.

TABLEAU N° VIII.

Vinaigre pur.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	— 2 $\frac{1}{2}$.	1385.
2.	— $\frac{1}{4}$.	1281.
3.	0.	
4.	1 $\frac{1}{2}$.	1204.
5.	9.	911.
6.	17.	782.
7.	30 $\frac{1}{2}$.	586.
8.	40.	492.
9.	50.	412.
10.	60.	362.
11.	69 $\frac{1}{2}$.	316.
12.	78 $\frac{1}{2}$.	288.
13.	86.	273.

On remarque, en jetant les yeux sur ce tableau, qu'à 1 degré $\frac{1}{2}$ de température, la dépense d'un quart de litre se fait en 1204 secondes, tandis que cette dépense d'eau pure au même degré du thermomètre n'exige que 990 secondes.

Comparant de même les temps d'écoulement de ces deux liquides à 86 degrés de température, on trouve qu'ils sont pour le vinaigre de 273 secondes et pour l'eau de 248 : ainsi les durées de ces écoulemens différent d'autant moins entre

elles que la température est plus élevée; ce qui s'accorde avec la loi générale déja observée.

J'ai ensuite affaibli le vinaigre blanc dont je venais de me servir en y ajoutant d'abord $\frac{1}{3}$ d'eau en volume, ensuite partie égale de ce liquide. J'ai obtenu sur ces mélanges les observations que présentent les deux tableaux suivans nº IX et nº X.

TABLEAU Nº IX.

Mélange de deux tiers de vinaigre et d'un tiers d'eau en volume.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	$4\frac{3}{4}$.	1020.
2.	20.	695.
3.	30.	558.
4.	40.	461.
5.	50.	392.
6.	60.	346.
7.	70.	297.
8.	85.	260.

TABLEAU N° X.

Mélange de parties égales de vinaigre et d'eau.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÈS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	4 $\frac{1}{2}$.	1006.
2.	20.	687.
3.	30.	550.
4.	40.	459.
5.	50.	391.
6.	60.	340.
7.	69 $\frac{1}{2}$.	299.
8.	84 $\frac{1}{2}$.	261.

En examinant ces tableaux qui s'étendent l'un et l'autre de 4 à 85 degrés du thermomètre, on retrouve la loi générale en vertu de laquelle les durées de l'écoulement se rapprochent entre elles à mesure que les températures s'élèvent. On y voit aussi que ces durées, pour différens mélanges pris à températures égales, tendent d'autant plus à se confondre avec les durées de l'écoulement de l'eau pure aux mêmes degrés, que l'eau entre dans ces mélanges en plus grande proportion.

§. VI.

Expériences sur l'écoulement de diverses dissolutions de muriate de soude.

J'ai voulu connaître la marche des phénomènes de l'écoulement linéaire pour certaines dissolutions salines, et j'ai commencé par éprouver celle de muriate de soude.

J'ai d'abord fait dissoudre un demi-kilogramme de ce sel dans un litre $\frac{1}{2}$ d'eau et j'ai obtenu pour neuf observations comprises entre 1 degré $\frac{1}{2}$ au-dessous de zéro et 80 degrés au-dessus, les résultats que présente le tableau n° XI.

TABLEAU N° XI.

Dissolution d'un demi-kilogramme de muriate de soude dans un litre et demi d'eau.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	— 1 $\frac{1}{2}$.	1475.
2.	0.	1337.
3.	5.	1286.
4.	20.	868.
5.	30.	727.
6.	40.	604.
7.	50.	510.
8.	60.	443.
9.	80.	354.

Ce tableau indique que la dépense d'un quart de litre d'eau

salée à une température quelconque, se fait beaucoup plus lentement que la dépense du même volume d'eau pure. Ainsi à zéro du thermomètre par exemple, il faut 1337 secondes pour l'écoulement d'un quart de litre de la dissolution de muriate de soude, tandis que le même volume d'eau s'écoule dans l'espace de 1036 secondes seulement. Mais à 80 degrés le premier de ces deux liquides s'écoule en 354 secondes, et le second en 252.

Les différences entre les durées de ces écoulemens se manifestent donc conformément à la loi générale observée dans les phénomènes de l'écoulement linéaire de l'alcool et des liqueurs visqueuses.

J'ai rappelé ailleurs que M. le chevalier Dubuat avait déja reconnu que les produits de l'écoulement de l'eau salée, par de petits tubes de verre, étaient moindres en temps égaux que les produits de l'écoulement de l'eau douce, mais le très-petit nombre d'expériences qu'il cite ne sont point comparables entre elles. Il attribue au surplus, comme le professeur Gœrstner l'a fait depuis, ces différences de dépense, au plus ou moins de fluidité des deux liqueurs.

La même dissolution de muriate de soude a été ensuite étendue d'une quantité d'eau égale à celle dans laquelle ce sel était déja dissous. J'ai fait varier la température de cette dissolution d'un $\frac{1}{2}$ kilogramme de sel dans 3 litres d'eau, depuis 1 degré $\frac{1}{2}$ au-dessous de zéro jusqu'à 60 degrés au-dessus et j'ai obtenu les résultats consignés dans le tableau n° XII.

TABLEAU N° XII.

Dissolution d'un demi-kilogramme de muriate de soude dans trois litres d'eau.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	— 1 $\frac{1}{2}$.	1177.
2.	11.	865.
3.	20.	694.
4.	30.	585.
5.	40.	493.
6.	50.	420.
7.	60.	365.

On voit que ces résultats s'approchent beaucoup de ceux de l'écoulement de l'eau pure. Ainsi, à 11 degrés, l'écoulement d'un quart de litre de la dissolution exige 865 secondes et la même dépense d'eau à la même température se fait en 752 secondes. Lorsque ces deux liquides sont l'un et l'autre à 60 degrés, le premier s'écoule en 365 secondes, et le deuxième en 306 secondes; ce que nous avons dit plus haut du rapprochement des résultats de l'observation pour différentes dissolutions, à mesure que la température s'élève, se trouve de nouveau confirmé.

§. VII.

Expériences sur l'écoulement d'une dissolution de sulfate de soude.

Un demi-kilogramme de sulfate de soude a été dissous dans un litre $\frac{1}{2}$ d'eau, et cette dissolution ayant été chauffée jusqu'à 65 degrés a été mise en expérience.

Le tableau n° XIII offre les résultats qui ont été observés.

TABLEAU N° XIII.

Dissolution d'un demi-kilogramme de sulfate de soude dans un litre et demi d'eau.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	20.	872.
2.	30.	673.
3.	40.	540.
4.	50.	459.
5.	65.	371.

On voit qu'à 65 degrés, il a fallu 371 secondes pour remplir le $\frac{1}{4}$ de litre, et à 20 degrés 872″.

A 15 degrés la dissolution s'est cristallisée dans le tube, quoiqu'il ne parût point encore de cristaux dans le réservoir qui entretenait l'écoulement ce qui a forcé de suspendre la suite des observations au-dessous de 20 degrés de température.

Si l'on compare les temps d'écoulement de dissolutions de muriate et de sulfate de soude indiqués par le XIe et le XIIIe tableau, on voit qu'à 20 degrés du thermomètre, ces temps sont sensiblement égaux, tandis qu'à partir de 30 degrés jusqu'au 65e, l'écoulement de la dissolution de sulfate de soude est plus rapide. Cette différence prouve évidemment celle que l'action de la surface du verre peut exercer sur des dissolutions salines.

§. VIII.

Expériences sur l'écoulement de diverses dissolutions de nitrate de potasse.

J'ai fait dissoudre un demi-kilogramme de nitrate de potasse dans un litre $\frac{1}{2}$ d'eau, et j'ai soumis cette dissolution à l'expérience.

Le tableau n° XIV présente les résultats de onze observations qui sont comprises entre 10 et 86 degrés de température.

TABLEAU N° XIV.

Dissolution d'un demi-kilogramme de nitrate de potasse dans un litre et demi d'eau.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	10.	681.
2.	14 $\frac{1}{2}$.	613.
3.	17 $\frac{3}{4}$.	559.
4.	20.	543.
5.	25.	499.
6.	30.	456.
7.	40.	404.
8.	50.	351.
9.	60.	310.
10.	70.	284.
11.	86.	260.

La comparaison des deux observations extrêmes de ce tableau montre qu'à 10 degrés de température, le temps de l'écoulement d'un quart de litre est de 681″ et à 86 degrés de 260″ seulement.

Les durées de l'écoulement de l'eau pure dans les mêmes circonstances ont été observées de 777 et de 246″.

Ainsi, dans la partie inférieure de l'échelle thermométrique, un quart de litre de la dissolution de nitrate de potasse mise à l'épreuve s'écoule plus rapidement que le même volume d'eau pure. La différence est de 96 secondes, ou d'envi-

ron $\frac{1}{8}$ de la durée totale. Le contraire arrive dans la partie supérieure de l'échelle puisqu'à 86 degrés l'écoulement de la dissolution de nitrate de potasse est plus long de 11 secondes ou d'un 24ᵉ environ que l'écoulement de l'eau pure.

Les expériences dont nous rendons compte dans ce paragraphe présentent une singularité remarquable. En effet la durée de l'écoulement de tous les liquides que nous avions observés jusqu'ici est plus longue que la durée de l'écoulement d'un même volume d'eau à la même température de plus, à mesure que l'eau entre en plus grande proportion dans les mélanges mis à l'épreuve, ou que les dissolutions salines en sont plus étendues, les durées de leur écoulement deviennent plus courtes; on serait donc, en quelque sorte, fondé à conclure, ou que l'action de la surface du verre sur l'eau est moindre que sur les liquides visqueux ou sur les dissolutions salines; ou bien que ces différentes liqueurs jouissent d'un degré de fluidité moindre que celui de l'eau. Mais cette loi qu'un certain nombre d'essais pourrait porter à généraliser, est démentie par ceux dont la dissolution de nitrate de potasse vient d'être l'objet, car quoiqu'elle fût à un degré de concentration assez considérable puisqu'elle marquait, à 30 degrés de température, 22 degrés à l'aréomètre, et que sa viscosité fût palpable, son écoulement n'en a pas moins été plus prompt que celui de l'eau pure entre les 10ᵉ et 50ᵉ degrés du thermomètre, terme au-delà duquel l'écoulement de l'eau est à son tour devenu plus rapide.

Ce phénomène me paraissant mériter un examen approfondi, j'ai ajouté $\frac{1}{4}$ de kilogramme de nitrate de potasse à la dissolution précédente. Cette dissolution, plus concentrée que

la première, a été élevée à 90 degrés de température, et la durée de l'écoulement a été observée en descendant de 10 en 10 degrés jusqu'à 40. La température ayant été abaissée à 30 degrés pour continuer les observations, la liqueur s'est cristallisée dans le tube et on a été obligé de les suspendre. Les résultats des six observations auxquelles cette dissolution de nitrate de potasse a donné lieu sont consignés dans le tableau suivant.

TABLEAU N° XV.

Dissolution de trois quarts de kilogramme de nitrate de potasse dans un litre et demi d'eau.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	40.	445.
2.	50.	389.
3.	60.	356.
4.	70.	339.
5.	80.	303.
6.	90.	278.

On voit qu'aux limites de ce tableau à 40 et à 90 degrés de température, les durées de l'écoulement du quart de litre sont de 445 et de 278 secondes. Celles de l'écoulement de l'eau à ces deux degrés du thermomètre sont de 413 et de 246 secondes : c'est-à-dire, que le quart de litre d'eau est dépensé en moins de temps que le même volume de la dissolution que nous examinons, ce qui a lieu dans toute

l'étendue de l'échelle thermométrique; cette dissolution diffère donc de la première, non-seulement par le degré de sa concentration qui la rend plus visqueuse, mais encore probablement par l'intensité de l'action qu'elle est susceptible d'exercer sur la surface intérieure du tube.

Voulant connaître de nouveau ce qui aurait lieu dans une dissolution moins concentrée, j'ai ajouté un litre $\frac{1}{2}$ d'eau à celle qui venait d'être mise à l'épreuve; ainsi trois litres d'eau tenaient en dissolution $\frac{3}{4}$ de kilogramme de nitrate de potasse; cette liqueur a été chauffée à 80 degrés et l'ayant laissée refroidir graduellement on a observé de dix en dix degrés les durées de l'écoulement d'un quart de litre.

Le tableau n° XVI présente les résultats de ces observations.

TABLEAU N° XVI.

Dissolution de trois quarts de kilogramme de nitrate de potasse dans trois litres d'eau.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	14 $\frac{1}{2}$.	605.
2.	20.	539.
3.	30.	463.
4.	40.	396.
5.	50.	351.
6.	60.	318.
7.	70.	285.
8.	80.	264.

La cristallisation de la liqueur qui s'est manifestée vers le 10e degré du thermomètre a empêché de prolonger les observations au-dessous du 14e. A cette température, et à 80 degrés, les durées de l'écoulement ont été respectivement de 605 et de 264 secondes. Celles de l'eau aux mêmes degrés ont été de 700 et de 252 secondes. Ici, comme dans la premiere dissolution de nitrate que nous avons essayée, l'écoulement a été plus rapide que celui de l'eau jusqu'au 50e degré environ, passé lequel, à mesure que la température s'est élevée, la durée de l'écoulement de l'eau est devenue moindre que celle du même volume de la dissolution.

Les faits que présente l'écoulement linéaire des dissolutions de nitrate de potasse conduisent à quelques considérations importantes, par lesquelles nous terminerons ce paragraphe. Nous remarquerons d'abord que le poids de ce sel, est à celui de l'eau qui le tient dissous, savoir : Pour les observations du tableau n° XIV dans le rapport de 1 à 3.

Pour les observations du tableau n° XV dans le rapport de 1 à 2.

Enfin pour les observations du tableau n° XVI dans le rapport de 1 à 4.

Or les observations du tableau n° XIV prouvent que le produit de l'écoulement de la dissolution est plus grand que le produit de l'écoulement de l'eau jusqu'au 50e degré du thermomètre à partir de l'extrémité inférieure de l'échelle.

On voit par celles du tableau n° XV qu'en augmentant d'un 6e le poids du nitrate de potasse, la nouvelle dissolution qu'on obtient s'écoule plus lentement que l'eau à tous les degrés de température.

Enfin celles du tableau n° XVI comparées à celles du ta-

bleau n° XIV font voir qu'une différence de $\frac{1}{15}$ dans le poids du sel dissous ne change d'une manière sensible, ni les durées de leur écoulement, ni le degré de température auquel l'écoulement de l'eau commence à devenir plus rapide. D'un autre côté il est évident que la viscosité de ces différens liquides doit augmenter d'autant plus que la quantité de sel qu'elles tiennent en dissolution est plus considérable, et comme dans certains cas, on diminue la dépense par une addition de sel tandis qu'en d'autres circonstances on ne l'augmente pas en affaiblissant la dissolution, il s'ensuit nécessairement que le plus ou moins de viscosité de ces liquides n'est pas la seule cause qui influe sur les produits de leur écoulement linéaire; mais que les modifications qu'ils subissent dépendent encore de la distance à laquelle l'action de la surface intérieure du tube s'étend sur ces liquides, distance variable mesurée par l'épaisseur de la couche fluide qui reste adhérente à cette surface, et qui réduit par conséquent plus ou moins le diamètre effectif du tube par lequel l'écoulement s'opère.

J'ai fait quelques expériences en substituant au tube de verre employé jusqu'ici, un tube de même matière ayant $0^m,357$ de longueur et $0^m,001122$ d'ouverture. Les écoulemens de l'eau pure, de deux dissolutions de nitrate de potasse inégalement concentrées, et d'une dissolution de muriate de soude qui ont eu lieu par ce tube à différentes températures, ont présenté dans leurs durées des différences analogues à celles qui avaient déja été observées. Ces différences ont été seulement modifiées par la plus grande capillarité du tube, et cela doit être ainsi; car puisque l'action de la surface du verre sur les fluides qui ont la propriété de la mouiller ne s'exerce pas seulement au contact mais s'étend

à une certaine distance au-delà, il est clair que le plus ou moins de courbure de la paroi intérieure du tube doit influer sur le résultat de cette action, dont par conséquent le calcul seul peut conduire à déterminer les lois.

Je me bornerai à remarquer ici, comme un des effets de la plus grande capillarité, que les dissolutions de nitrate de potasse qui étaient au même point de concentration que celles précédemment employées, donnaient des produits d'écoulement plus considérables que ceux de l'écoulement de l'eau à des températures égales dans le même tube, non pas seulement depuis le premier terme de la fluidité de ces dissolutions, jusqu'au 50ᵉ degré du thermomètre, comme dans nos premières épreuves, mais jusqu'aux 60ᵉ et 70ᵉ degrés. Ce qui semble prouver que la propriété pour ainsi dire *diurétique* dont jouissent dans des tubes de verre les dissolutions de nitrate de potasse sur une certaine étendue de l'échelle thermométrique, se manifeste entre des points de cette échelle d'autant plus éloignés les uns des autres, que les tubes par lesquels ces dissolutions s'écoulent sont plus capillaires.

Je ferai remarquer encore, en terminant cet article, que souvent, lorsque le tube est très-capillaire ou que la charge sur son orifice est très-petite, le liquide en sort goutte à goutte; l'écoulement alors paraît discontinu et l'on pourrait croire que son produit subit quelques altérations par la variabilité de figure et de volume qu'éprouve la goutte liquide, jusqu'à ce qu'elle ait acquis assez de pesanteur pour se détacher du tube. Mais il n'en est point ainsi : on peut facilement en effet prévenir la formation de cette goutte en ajustant à l'orifice de ce tube une espèce de gouttière formée d'une sub-

stance quelconque susceptible d'être mouillée par le liquide. Un simple fil par exemple : on voit alors l'écoulement se prolonger le long de ce fil comme dans l'intérieur du tube, sans cesser d'être continu. Or si l'on en mesure le produit en un temps donné, on le trouve exactement le même qu'il était avant l'addition du fil. Cette expérience, répétée un grand nombre de fois, m'a toujours fourni la preuve de cette identité de résultats dans les deux circonstances, et montre combien il est nécessaire de rectifier, par le poids et la mesure, des jugemens que de fausses apparences peuvent quelquefois conduire à porter.

ARTICLE SECOND.

Expériences sur l'écoulement de l'eau et de l'alcohol par le tube de verre n° 2, *de* $0^{m},99$ *de longueur, et de* $0^{m},0042$ *de diamètre.*

Toutes les expériences dont nous avons présenté les résultats jusqu'ici font voir qu'il existe à la même température de grandes différences entre les produits de l'écoulement linéaire des divers fluides qui ont la propriété de mouiller le verre.

Or puisque ces différences s'évanouissent lorsque le mouvement cesse d'être linéaire, c'est-à-dire, lorsque sous une longueur déterminée, le diamètre du tube est trop grand, on conçoit que si l'action de la surface intérieure du tube s'étend sur un certain liquide à une plus grande distance que sur un autre, il peut arriver que l'épaisseur de la couche fluide qui, dans le premier cas, tapisse la paroi intérieure du tube, soit

assez forte pour en réduire le diamètre effectif au degré de capillarité propre à produire la linéarité du mouvement, tandis que dans le deuxième cas, l'épaisseur de la couche qui adhère à la paroi du tube, n'en diminue pas assez le diamètre pour le rendre propre à produire le même effet.

Ainsi en soumettant à l'épreuve deux liquides convenablement choisis, leur écoulement par le même tube manifestera ou ne manifestera pas, suivant la nature de chacun d'eux, les phénomènes par lesquels la linéarité du mouvement est essentiellement caractérisée.

Pour vérifier ce point de théorie, j'ai remplacé le tube de verre qui a servi à nos premières expériences, par un autre tube également de verre mais de $0^{m},99$ de longueur et de 0,0042 de diamètre.

J'ai choisi ensuite pour les soumettre à l'épreuve l'eau et l'alcohol mélangé d'eau dont les produits d'écoulement, aux mêmes degrés du thermomètre, ont présenté comme on l'a vu de grandes différences.

Notre réservoir cylindrique a d'abord été rempli d'eau pure et on a obtenu, dans l'intervalle thermométrique compris entre 20 et 86 degrés, les six observations que présente le tableau suivant.

TABLEAU N° XVII.

Expériences sur l'écoulement de l'eau pure.

Charge moyenne au-dessus de l'orifice du tube $0^{m}1824$;
Longueur du tube $0^{m}99$;
Diamètre du tube 0, 0042.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	20.	75.
2.	50.	69.
3.	60.	69.
4.	70.	69.
5.	80.	68.
6.	86.	68.

Aux deux extrémités de ce tableau, les durées de l'écoulement d'un quart de litre ont été trouvées de 75 et de 68 secondes, c'est-a-dire, dans le rapport de 100 à 90 environ. Dans le tube n° 1, la durée des écoulemens a été trouvée aux mêmes températures de 600 et de 248 secondes ; nombres qui sont entre eux à très-peu-près :: 100 : 40; d'où l'on voit que l'influence de la température est très-peu sensible dans le tube du tableau précédent, tandis qu'elle est très-considérable dans celui d'un diamètre moindre employé à nos premières expériences.

Laissant l'appareil dans le même état, j'ai substitué à l'eau pure dont le réservoir avait été rempli, un mélange d'alcohol

et d'eau marquant 16 degrés à l'aréomètre sous une température de 5 degrés.

Ce mélange ayant été chauffé jusqu'à 60 degrés, a fourni les six observations du tableau n° XVIII.

TABLEAU N° XVIII.

Expériences faites sur un mélange d'alcohol et d'eau.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.
1.	5.	371.
2.	20.	182.
3.	30.	135.
4.	40.	103.
5.	50.	95.
6.	60.	73.

On voit qu'à 20 et 60 degrés de température, les durées de l'écoulement d'un quart de litre ont été respectivement de 182 et de 73 secondes, c'est-à-dire à très-peu près, dans le rapport de 100 à 40. Avec notre premier tube et aux mêmes degrés du thermomètre les durées de l'écoulement du même volume d'alcohol mélangé d'eau ont été de 1055 ou de 433 secondes (tableau n° III), ou dans le rapport de 100 à 41 : ainsi, entre ces limites de l'échelle thermométrique, l'influence de la température sur la durée de l'écoulement de la liqueur est aussi grande dans l'un que dans l'autre tuyau.

Il suit, des comparaisons que nous venons de faire, que

l'écoulement d'un mélange d'alcohol et d'eau continue d'être linéaire dans des tubes qui ont un diamètre trop grand, ou trop peu de longueur, pour que l'eau pure y conserve la linéarité de son mouvement, ce qui ne peut provenir que de la plus grande intensité d'action de la surface du verre sur l'alcohol, et ce qui confirme la théorie par laquelle nous avons expliqué ce phénomène.

ARTICLE TROISIÈME.

Observations générales sur les expériences qui viennent d'être rapportées, et nouvel examen de la formule qui leur est applicable.

Si l'on construit graphiquement les résultats des observations qui font l'objet de ce Mémoire, en prenant l'échelle thermométrique pour axe des abcisses et pour ordonnées les temps employés à l'écoulement d'un quart de litre de chacun des liquides mis à l'épreuve, on verra que toutes les courbes qui joindront les extrémités de ces ordonnées suivront une marche semblable et présenteront leur convexité à l'axe des abcisses auquel elles tendront à devenir parallèles à mesure que la température du liquide s'élévera davantage.

Notre confrère M. de Prony avait déja fait remarquer, dans son traité physico-mathématique du mouvement des eaux courantes, qu'en construisant ainsi graphiquement les résultats d'une suite d'observations, on obtenait immédiatement la connaissance approximative de la loi suivant laquelle les faits se présentent, et le moyen le plus facile de distinguer les observations anomales. L'application de ce procédé nous a été particulièrement utile, et il ne peut être trop recommandé à ceux qui entreprennent de déterminer par l'expérience la marche de certains phénomènes.

Ceux du mouvement linéaire des fluides qui ont la propriété de mouiller la surface intérieure des tubes dans lesquels ils coulent, sont exprimés par la formule

$$g \frac{Dh}{4la} = u.$$

que nous avons rapportée au commencement de ce Mémoire.

Si l'on appelle b ce que devient le coëfficient a lorsque la densité du liquide est égale à l'unité, δ cette densité à un degré quelconque du thermomètre, Q la quantité de fluide qui s'écoule par seconde; enfin e, l'épaisseur de la couche qui reste adhérente à la paroi intérieure du tuyau, son diamètre effectif sera $D - 2e = 2R - 2e$, en faisant $R = \frac{1}{2}D$, et à cause de $a = b\delta^3$, et de

$$u = \frac{4Q}{\pi(2R - 2e)^2},$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre; la formule précédente se changera en celle-ci:

$$\pi g \frac{h.(R-e)^3}{2lQ} = b\delta^3$$

qui donne les rapports entre le produit Q de l'écoulement par seconde, l'adhérence des couches liquides entre elles $b\delta^3$, l'épaisseur e de celle qui tapisse l'intérieur du tube, la longueur l de ce tube, et la hauteur h de la charge sur son orifice.

Si l'on appelle M le volume constant de fluide qui s'écoule dans un temps t, variable avec les quantités e, $b\delta^3$, l et h, on aura $Qt = M$, et par conséquent $Q = \frac{M}{t}$; substituant cette valeur de Q dans la formule elle deviendra :

$$\pi g \frac{h.(R-e)^3 t}{2lM} = b\delta^3,$$

d'où l'on tire

$$t = \frac{2lMb\delta^3}{\pi g h.(R-e)^3}.$$

Dans nos observations, le volume constant M de l'écoulement, la longueur l du tube, son diamètre 2R, et la hauteur h de la charge, sont des quantités connues : la densité δ du liquide, l'épaisseur e de la couche adhérente à la paroi intérieure du tuyau, et le temps t de l'écoulement, varient pour chaque observation ; de sorte qu'en laissant notre formule telle que nous venons de la présenter, elle peut être considérée comme l'équation d'une surface courbe qui aurait pour coordonnées les trois variables t, δ et e, mais comme les deux dernières sont l'une et l'autre des fonctions particulières de la température T, cette équation se transforme naturellement en celle d'une courbe plane. En effet, quoiqu'on ne connaisse point généralement la loi suivant laquelle la température fait varier la densité d'un liquide quelconque, et que cette loi soit probablement différente pour chaque liquide, on peut toujours la représenter par l'équation

$$\delta = A' + B'T + C'T^2 + D'T^3 + \text{etc.}$$

où les coëfficiens A', B', C', D', etc., des puissances successives de la temqérature T sont supposés connus par l'observation.

D'un autre coté nous avons trouvé dans notre précédent mémoire.

$$e = R - \sqrt{R^2 + B(100 - T) + C(10000 - T^2) + D(1000000 - T^3) + \text{etc.}}$$

substituant donc les valeurs de δ et de c en fonction de la température, notre formule devient :

$$t = \frac{2lMb}{\pi g h.}\left(\frac{(A' + B'T + C'T^2 + D'T^3 + \text{etc.})^2}{(R^2 + B.(100 - T + C(10000\,T^2) + \text{etc.})^4}\right),$$

laquelle est l'équation générale de la courbe plane qui représente graphiquement les relations de la température et de la durée de l'écoulement d'un même volume de liquide dans un tube donné, et sous une charge déterminée.

Cette équation, entre les deux variables t et T, étant toujours de la même forme, quel que soit le liquide auquel elle s'applique, et n'éprouvant d'autres modifications que celle de ses paramètres, c'est-à-dire que celles qui proviennent des changemens de valeurs des coëfficients A, B, C, etc., A', B', C', etc., ou des différences de signes qui peuvent les affecter, on explique naturellement comment en la traçant d'après l'observation, elle doit toujours se trouver disposée de la même manière par rapport à l'axe mais seulement s'en rapprocher plus ou moins suivant la nature du liquide mis en expérience.

Si nous remettons cette équation sous sa première forme en la simplifiant encore par la substitution du diamètre effectif du tube que nous nommerons y à la quantité $2R - 2c$ qui en est la valeur, nous aurons :

$$t = \frac{16\,l M b \delta^2}{\pi g h y^3}.$$

on voit à la simple inspection de cette formule que le temps de l'écoulement d'un volume constant de fluide par un tube donné, sous une même charge, et à la même température, est en raison directe de l'adhérence mutuelle ou de la viscosité

$b\ \delta^3$ des couches fluides, et en raison inverse de la troisième puissance y^3 du diamètre effectif du tube.

La durée de l'écoulement dépend ainsi de deux causes parfaitement distinctes; l'une inhérente au fluide seul est sa viscosité spécifique, c'est la force retardatrice qui, dans le mouvement linéaire, peut seule contrebalancer l'action de la gravité. L'autre cause, à la production de laquelle le liquide et le tube concourent ensemble, est l'action que ces deux substances exercent l'une sur l'autre: action dont l'effet s'étendant à des distances sensibles plus grandes ou plus petites, augmente ou diminue l'épaisseur de la couche fluide immobile qui tapisse l'intérieur du tube, ce qui oblige le filet fluide en mouvement, de se mouler pour ainsi dire dans un vuide d'une plus petite ou d'une plus grande ouverture, dont le diamètre devient par conséquent le diamètre réel ou effectif du tube par lequel l'écoulement s'opère.

Or comme l'action de la surface d'un corps solide peut être différente sur les différens liquides susceptibles de la mouiller, quelle que soit d'ailleurs la viscosité spécifique de ceux-ci, on conçoit qu'indépendamment de cette viscosité, les durées de l'écoulement de ces liquides par un même tube peuvent être plus grandes ou plus petites, puisqu'alors le diamètre effectif de ce tube devient lui-même plus petit ou plus grand.

Ces conséquences déduites de notre formule générale, expliquent naturellement comment certains fluides visqueux, tels, par exemple, que des dissolutions de nitrate de potasse donnent cependant, dans les mêmes circonstances, un produit d'écoulement plus grand que l'eau pure, dont la fluidité est évidemment plus parfaite. C'est parce que l'action du verre

sur les dissolutions salines dont il s'agit, s'étend dans un certain espace de l'échelle thermométrique à une distance moindre, que l'action du verre sur l'eau; explication qui s'applique de la même manière aux différences que nous avons observées entre les durées de l'écoulement de l'alcohol et de quelques autres liqueurs plus visqueuses, telles que l'huile de térébenthine et l'eau sucrée.

Remarquons au surplus que si la même substance solide peut exercer une action différente sur différens liquides, l'action d'un même liquide sur des solides différens peut aussi différer d'intensité; de sorte que notre formule générale du mouvement linéaire dans des tubes susceptibles d'être mouillés, embrasse tous les cas possibles, soit ceux où la nature des liquides varie, soit ceux où l'on fait varier la substance même des tubes qui les contiennent.

La propriété dont jouissent certains liquides de mouiller la surface de certains corps solides est constatée par d'innombrables observations. La théorie développée dans ce Mémoire peut servir à soumettre au calcul quelques-uns des effets de cette propriété, mais ni l'expérience ni le raisonnement ne peuvent conduire à en connaître la cause, et l'on ne peut expliquer davantage comment et pourquoi tel liquide mouille plus ou moins telle surface d'un corps solide, qu'on ne peut expliquer le jeu des affinités chimiques dont, suivant l'opinion de M. Berthollet, cette espèce d'adhérence n'est qu'un cas particulier.

Lorsque le degré de température du liquide mis en expérience approche du terme de sa vaporisation, l'épaisseur e de la couche fluide qui tapisse l'intérieur du tube peut être regardée comme nulle ce qui pour ce cas donne $y = 2R = D$,

et par conséquent

$$b\delta^3 = g\frac{\pi h D^4 t}{16 l M},$$

c'est-à-dire que la viscosité d'un liquide quelconque, au plus haut degré du thermomètre auquel il puisse s'élever avant de se réduire en vapeurs est proportionnelle à la durée t de l'écoulement d'un volume déterminé M de ce liquide.

Si donc on connaît la valeur de $b\delta^3$ pour un fluide quelconque à la dernière limite de sa liquidité, on obtiendra aisément la valeur de $b\delta^3$ pour tout autre liquide à la même limite. Il ne faut pour cela qu'assigner à l'aide de l'expérience le temps employé pour l'écoulement d'un certain volume de ces liquides au plus haut degré de température auquel on puisse les élever.

Nous avons trouvé, par exemple, que la viscosité de l'eau à 99 degrés $\frac{1}{2}$ du thermomètre avait pour expression

$$0,00078971 \times 0,8722 = 0,00068878;$$

Supposant donc que les différens liquides mis à l'épreuve aient été élevés dans nos observations au plus haut degré de température, que chacun deux puisse supporter avant de passer à l'état gazeux, et prenant le temps de l'écoulement d'un quart de litre de chacun de ces liquides observés à cette température, on dressera la table suivante de leurs viscosités spécifiques, au terme de leur vaporisation.

TABLEAU N° XIX.

Viscosités spécifiques approximatives de différens liquides.

NUMÉROS des TABLEAUX.	INDICATION des différens LIQUIDES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes de l'écoulement de chaque LIQUIDE.	VISCOSITÉS SPÉCIFIQUES au moment de la vaporisation.
1.	Eau pure.	90.	246.	0,00068878.
5.	Eau sucrée.	80.	406.	0,00113674.
6.	*Idem.*	80.	312.	0,00087358.
8.	Vinaigre pur.	85.	273.	0,00076438.
9.	Vinaigre et eau.	85.	260.	0,00072798.
10.	*Idem.*	84.	261.	0,00073078.
11.	Eau salée.	80.	354.	0,00099118.
14.	Dissolution de nitrate de potasse.	86.	260.	0,00072798.
15.	*Idem.*	90.	278.	0,00077838.
16.	*Idem.*	80.	264.	0,00073918.

Les valeurs des viscosités spécifiques, indiquées dans cette table ne peuvent être rigoureusement regardées que comme approximatives, parce qu'on n'est pas suffisamment assuré que la température à laquelle ont été faites les expériences d'où elles sont déduites, soit la plus haute, que chacun des liquides qui en ont été l'objet soit susceptible d'atteindre, avant de passer à l'état gazeux. Mais comme aux approches de cet état les différences entre les durées de l'écoulement, deviennent très-peu sensibles, on conçoit que les viscosités telles que nous venons de les calculer doivent sensiblement se confondre avec celles que les observations plus précises auraient pu fournir.

Quant à l'expression de la viscosité d'un liquide quelconque correspondante aux autres degrés de l'échelle thermométrique, elle est, comme on sait, proportionnelle au cube de la densité de ce liquide à ce degré, et ne dépend par conséquent que de la détermination de celle-ci : détermination à laquelle il nous semble au surplus que l'on parviendra toujours d'une manière plus facile et plus sûre, à l'aide d'expériences aérométriques bien faites, que par des calculs établis sur des observations qui n'auraient pas directement cette détermination pour objet.

Nous sommes parvenus à exprimer généralement, par une équation, les conditions du mouvement linéaire déduites de la connaissance des forces accélératrices qui impriment ce mouvement, et des forces retardatrices en vertu desquelles il devient uniforme ou subit des modifications quelconques. Nous avons donc maintenant toutes les données nécessaires pour résoudre complètement les questions relatives à cette branche de l'hydrodynamique.

Quoique les géomètres et les physiciens s'en soient peu occupés jusqu'à-présent, ces questions considérées sous un point de vue philosophique n'en sont pas moins dignes de fixer l'attention par l'étendue et l'importance des fonctions que la nature semble avoir attribuées au mouvement linéaire des fluides. Ce mouvement, le plus simple de tous ceux dont l'hydrodynamique comporte l'idée, est aussi le plus universellement employé dans les opérations de la nature. C'est en effet par des tubes, ou des canaux capillaires, que circulent les différens fluides qui, dans les deux premiers règnes, constituent l'existence organique, et si l'action de la chaleur exerce toujours sur la plupart des phénomènes de cette exis-

tence une influence plus ou moins sensible, cela tient surtout, à ce que, par le seul effet de la capillarité de ces canaux, le volume de fluide destiné à les parcourir, d'un mouvement linéaire, y circule avec plus ou moins de rapidité suivant que sa température est plus élevée ou plus basse, propriété caractéristique de ces espèces de tubes et dont les résultats s'amplifient en quelque sorte à mesure que leur diamètre devient plus petit.

Ce que nous disons ici ne s'applique cependant qu'aux seuls cas du mouvement linéaire où la surface des parois du tuyau, et le fluide qui s'y meut, sont susceptibles d'adhérer l'une à l'autre. Lorsqu'il n'existe aucune tendance à la combinaison entre ces deux substances, le mouvement linéaire suit d'autres lois que nous allons exposer et analyser dans le chapitre suivant.

SECTION SECONDE.

Observations faites sur l'écoulement linéaire des fluides qui n'ont pas la propriété de mouiller le verre.

Le mercure jouit comme on sait de la propriété de ne point contracter d'adhérence avec la surface du verre; c'est ce fluide que nous avons choisi pour l'objet des expériences qui nous restaient à entreprendre sur le mouvement linéaire dans ce cas particulier.

ARTICLE PREMIER.

Expériences faites avec les tubes n°s 1, 2, 3 *et* 4.

Le même tube de verre n° 1, de 0^{m}939 de longueur et de 0^{m}001767 d'ouverture, qui avait été employé pour la plupart des observations de la section précédente, a été implanté

dans un vase cylindrique de même matière et de 0,045 de diamètre.

Après avoir dressé le vase verticalement j'ai tracé deux lignes horizontales sur son pourtour, la première à 182, la deuxième à 126 millimètres du centre de l'orifice du tube, de sorte que la hauteur comprise entre ces deux traits s'est trouvée de 0,056 millimètres. Le tube ayant ensuite été mis de niveau, on a versé du mercure dans le réservoir cylindrique; il s'est échappé librement par le tube jusqu'à ce que sa surface fût descendue dans le réservoir au niveau de la trace supérieure faite sur son pourtour. On a alors commencé à compter le nombre de secondes qui s'est écoulé jusqu'à ce que la surface de ce fluide se fût abaissée au niveau de la trace inférieure; l'on a ainsi obtenu la durée de l'écoulement d'un volume de 0,089 de litre de mercure, la hauteur de la charge étant de 0,182 millimètres au commencement de l'expérience, et de 0,126 millimètres à la fin.

Cette durée d'écoulement a été de 86 secondes, la température du mercure était à 10 degrés du thermomètre centigrade.

L'influence de la température sur les produits de l'écoulement présentant le phénomène le plus remarquable du mouvement linéaire des fluides lorsqu'ils sont susceptibles de mouiller la surface intérieure des tubes qui les contiennent, le premier objet de nos recherches sur l'écoulement linéaire du mercure dans des tubes de verre, devait être de nous assurer si les produits de cet écoulement étaient soumis à la même influence thermométrique.

En conséquence après avoir chauffé le mercure jusqu'à 70 degrés, on l'a versé dans le réservoir cylindrique.

On a observé le temps que la surface de ce fluide, échauffé à différens degrés, a employé à s'abaisser entre les deux traits horizontaux que porte la paroi extérieure du réservoir; c'est-à-dire, comme dans l'expérience précédente, le temps de l'écoulement d'un volume de $\frac{59}{1000}$ de litre.

Les résultats de ces observations sont indiqués dans le tableau suivant:

TABLEAU N° XX.

Expériences sur l'écoulement du mercure par le tube n° 1.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DURÉE en secondes DE CHAQUE EXPÉRIENCE.	VALEURS du COEFFICIENT b.
1.	65.	79.	0,005471.
2.	»	80.	
3.	»	81.	
4.	»	81.	
5.	»	81.	
6.	14.	80.	

On voit que, pendant la première observation de ce tableau, la température a été de 65 degrés et la durée de l'écoulement de 79 secondes; nous venions de trouver cette durée de 80 secondes, lorsque la température était à 10 degrés. Ces durées ne diffèrent par conséquent entre elles que d'une seconde pour un intervalle thermométrique de 55 degrés.

Afin d'obtenir des résultats applicables aux températures intermédiaires, nous avons remis dans le réservoir cylindrique, sans le faire chauffer de nouveau, le mercure qui

en était sorti lors de la première expérience. La durée de l'écoulement du même volume a été trouvée une deuxième fois, sous la même charge, de 80 secondes.

Le mercure, qui se refroidissait de plus en plus, a été remis successivement jusqu'à six fois dans le réservoir, et soumis à la même épreuve. Pendant les six observations consécutives qui ont été ainsi faites à des températures descendantes de 65 à 14 degrés, la durée de l'écoulement du même volume de mercure n'a varié que de 79 à 81 secondes. Or deux secondes sont ici dans les limites probables des erreurs de l'observation, d'où il suit que la température n'exerce aucune influence sur la durée de l'écoulement du mercure, par des tubes capillaires de verre, phénomène caractéristique et qui distingue essentiellement le mouvement linéaire des fluides qui ne mouillent pas la surface intérieure des tubes par lesquels ils s'écoulent, du mouvement linéaire de ceux qui ont la propriété de mouiller cette surface.

Les expériences dont nous venons de rendre compte ont eu lieu sous la même hauteur de charge du mercure au-dessus de l'orifice du tube par lequel il s'écoulait, il fallait maintenant faire varier tout à-la-fois la pression sur cet orifice et la température du fluide.

Pour cela, j'ai substitué au réservoir cylindrique de verre employé jusqu'ici, un réservoir de cuivre également cylindrique, de 76 millimètres de diamètre, et dont l'intérieur avait été tapissé préalablement de papier fin pour le garantir de l'action du mercure.

Notre tube de verre n° 1 a été implanté horizontalement dans la paroi de ce vase, à six centimètres au-dessous de son bord supérieur; faisant ensuite varier les charges sous les-

quelles un volume constant de mercure s'en écoulait à des températures différentes, on a obtenu les résultats que présente le tableau n° XXI.

TABLEAU N° XXI.

Seconde suite d'expériences sur l'écoulement du mercure par le tube n° 1.

N^{os} des Expér.	DEGRÉS du thermomètre.	CHARGE au commencement de l'expérience.	CHARGE à la fin de l'expérience.	DURÉE en secondes de chaque expérience.	VALEURS du coëfficient b.
1.	20 $\frac{1}{2}$.	0,060.	0,045.	150.	
2.	33.	0,060.	0,045.	153.	0,005536.
3.	46.	0,060.	0,045.	154.	
4.	17 $\frac{1}{2}$.	0,060.	0,045.	148.	
5.	17 $\frac{1}{2}$.	0,045.	0,030.	174.	0,005419.
6.	18.	0,045.	0,030.	180.	
7.	17 $\frac{1}{2}$.	0,030.	0,015.	246.	0,005405.
8.	18.	0,030.	0,015.	257.	

La surface du mercure dans le réservoir étant à 60 millimètres au-dessus du centre de l'orifice du tube, on a commencé à observer la durée de l'écoulement jusqu'à ce que cette surface fût descendue de 15 millimètres, ce qui a donné un produit de $\frac{61}{1000}$ de litre.

On a fait varier la température de 17 à 46 degrés pendant les quatre observations qui ont été faites dans cet état de l'appareil, et leurs résultats n'ont varié que de 148 à 154 secondes, encore convient-il de remarquer ici que la plus grande durée de l'écoulement a été observée lorsque la température du mercure était la plus élevée; ce qui ne peut s'expliquer que parce que la dilatation de la substance du réservoir, en

augmentant son diamètre, augmentait aussi le volume du cylindre de 15 millimètres de hauteur qui en sortait, ce qui devait nécessairement accroître dans un certain rapport le temps employé à son écoulement.

La surface du mercure étant à 45 millimètres au-dessus de l'orifice du tube, on l'a laissé descendre de 15 millimètres, de sorte qu'elle ne s'est plus trouvée, à la fin de l'expérience, que de 30 millimetrès au-dessus de ce même orifice.

L'écoulement du volume constant de $\frac{60}{1000}$ de litre s'est opéré en 174, et en 182 secondes à 17 degrés $\frac{1}{2}$ et à 18 degrés de température.

Enfin on a laissé encore la surface du mercure baisser de 15 millimètres dans le vase, jusqu'à ce que la hauteur de la charge qui, au commencement de l'expérience, était de 30 millimètres ne fût plus à la fin que de 15, et l'on a observé qu'à 17 degrés $\frac{1}{2}$ et 18 degrés de température les durées de l'écoulement ont été de 246 et 257 secondes.

Le mercure a continué de s'écouler librement par le tube, mais il s'est arrêté tout-à-coup lorsque sa surface était encore à une certaine hauteur au-dessus de l'orifice. J'ai trouvé cette hauteur d'environ 8 millimètres $\frac{1}{2}$ en la mesurant le plus exactement qu'il m'a été possible : ce fait, dont je fus d'abord très-frappé, et que je constatai de suite par plusieurs observations, mérite d'être remarqué ; car il distingue encore essentiellement l'écoulement linéaire du mercure dans des tubes de verre, de l'écoulement linéaire des liquides qui ont la propriété de mouiller les parois de ces tubes ; liquides dont nous avons remarqué que l'écoulement se prolongeait tant que la hauteur de la charge n'était pas devenue tout-à-fait nulle.

Après avoir fait varier la température et la charge dans l'écoulement linéaire du mercure par un même tube, il me restait à répéter les mêmes épreuves sur la même substance avec des tubes de dimensions différentes. J'ai donc substitué successivement au tube n° 1, le tube n° 2 de 0,001122 de diamètre, et de 0m,357 de longueur; le tube n° 3 de 0,002045 de diamètre, et de 0m,75 de longueur; et le tube n° 4 de 0,001788 de diamètre, et de 0m,83 de longueur; et j'ai obtenu les résultats d'observations consignés dans les tableaux nos XXII, XXIII et XXIV.

TABLEAU N° XXII.

Expériences sur l'écoulement du mercure par le tube n° 2.

Longueur du tube, 0m, 357.
Diamètre de tube, 0m,001122.

Nos des Expér.	DEGRÉS du thermomètre.	CHARGE au commencement de l'expérience.	CHARGE à la fin de l'expérience.	DURÉE en secondes de chaque expérience.	VALEURS du coëfficient *b*.
1.	18.	0,060.	0,045.	290.	0,006080.
2.	42 ½.	0,060.	0,045.	293.	
3.	18.	0,060.	0,045.	295.	
4.	38.	0,060.	0,045.	299.	
5.	33.	0,060.	0,045.	299.	
6.	18.	0,045.	0,030.	395.	0,007236.
7.	18.	0,030.	0,015.	557.	0,006374.

TABLEAU N° XXIII.

Expériences sur l'écoulement du mercure par le tube n° 3.

Longueur du tube, 0m75.
Diamètre du tube, 0m002045.

Nos des Expér.	DEGRÉS du thermomètre.	CHARGE au commencement de l'expérience.	CHARGE à la fin de l'expérience.	DURÉE en secondes de chaque expérience.	VALEURS du coefficient *b*.
1.	18.	0,060.	0,045.	79.	0,004555.
2.	18.	0,060.	0,045.	79.	
3.	18.	0,045.	0,030.	97.	0,004994.
4.	18.	0,045.	0,030.	99.	
5.	18.	0,030.	0,015.	139.	0,005069.
6.	18.	0,030.	0.015.	139.	

TABLEAU N° XXIV.

Expériences sur l'écoulement du mercure par le tube n° 4.

Longueur du tube, 0m83.
Diamètre du tube, 0m001788.

Nos des Expér.	DEGRÉS du thermomètre.	CHARGE au commencement de l'expérience.	CHARGE à la fin de l'expérience.	DURÉE en secondes de chaque expérience.	VALEURS du coefficient *b*.
1.	17.	0,060.	0,045.	123.	0,005038.
2.	17.	0,060.	0,045.	124.	
3.	17.	0,045.	0,030.	147.	0,005075.
4.	17.	0,046.	0,030.	149.	

On voit en examinant chacun de ces tableaux que la température n'exerce aucune influence sur les produits de l'écou-

lement du mercure par des tubes capillaires de verre, quelles que soient d'ailleurs les dimensions de ces tubes, pourvu qu'elles soient propres à produire la linéarité du mouvement.

J'ai remarqué au surplus que l'écoulement qui avait lieu par chacun d'eux, s'arrêtait lorsque la charge se trouvait encore à une certaine hauteur au-dessus de l'orifice, et que cette hauteur de charge, qui sert pour ainsi dire de limite à l'écoulement, était différente pour les différens tubes.

Ainsi je l'ai trouvée de 0,0085 pour le tube n° 1, de 0,0095 pour le tube n° 2, et de 0,0060 pour les tubes n°s 3 et 4.

ARTICLE SECOND.

Observations sur les expériences précédentes. — Théorie qui les explique.

Le mercure ne mouille point le verre; la résistance qu'il éprouve à se mouvoir dans des tubes de cette substance ne peut donc provenir de l'adhérence du cylindre fluide en mouvement, à la couche immobile de ce même fluide qui tapisserait les parois intérieures de ce tube, si elles étaient susceptibles d'en être mouillées. Il glisse à nud sur la surface de ces parois, la résistance à son mouvement ne provient donc que de leurs aspérités.

Or dans la formule générale du mouvement linéaire uniforme

$$g\frac{Dh}{4l} = au + bu^2;$$

Le premier terme au, de la force retardatrice, représente la portion de résistance qui est due à la cohésion des couches

fluides entre elles, tandis que le deuxième terme bu^2 représente la portion de résistance qui est produite par les aspérités de la surface sur laquelle le fluide se meut. Pour rendre cette formule générale applicable au mouvement linéaire du mercure dans les tubes de verre, il faut donc réduire la force retardatrice au seul terme bu^2 du second membre de cette formule qui devient par conséquent

$$g\frac{Dh}{4l}=bu^2.$$

De plus de ce que l'écoulement s'arrête dans le tube lorsqu'il y a encore une certaine hauteur de charge sur son orifice, il s'ensuit nécessairement que le mercure y éprouve un frottement analogue à celui que deux corps solides exercent l'un sur l'autre. Il faut en effet, pour que l'écoulement commence, que la charge sur l'orifice soit au-dessus d'une certaine hauteur ; de même qu'un corps solide ne peut commencer à glisser sur un plan incliné, à moins que son inclinaison n'ait lieu sous un certain angle en-deçà duquel le corps mobile reste en équilibre sur le plan.

Quoi qu'il en soit, le phénomène dont il s'agit doit être indiqué dans la formule

$$g\frac{Dh}{4l}=bu^2.$$

Si par exemple on appelle c la hauteur de charge à laquelle l'écoulement s'arrête pour un tube quelconque, il faut exprimer qu'au moment ou $h=c$, on a $u^2=0$: ce qui change l'équation précédente en celle-ci :

$$g\frac{D}{4l}(h-c)=bu^2$$

D'où l'on voit que ce n'est point en vertu de la charge réelle h que le mercure s'écoule, mais en vertu de la hauteur $h-c$.

Quant à la détermination au moyen de l'expérience du coëfficient b, dont la deuxième puissance de la vitesse est affectée, il faut supposer cette vitesse constante pendant la durée de chaque observation, et par conséquent faire subir une réduction aux vitesses variables portées dans les tableaux précédens.

Pour y parvenir appelons A^2 la surface de la section horizontale du réservoir cylindrique, et V la vitesse avec laquelle cette section horizontale descend pendant que le fluide se meut avec la vitesse u dans le tube, on aura

$$A^2 V = D^2 u,$$

d'où

$$u = \frac{A^2 V}{D^2},$$

et par conséquent

$$b V^2 = g \frac{D^5}{4 A^4 l}(h-c),$$

et enfin

$$V = \frac{D^2}{A^2}\sqrt{g \frac{D(h-c)}{4 l b}}.$$

Expression de la vitesse avec laquelle la tranche superficielle du fluide se meut verticalement dans le réservoir cylindrique pendant que la tranche transversale du petit tube se meut horizontalement dans ce tube.

Or il est évident que la quantité de mouvement produite pendant que la surface fluide s'abaisse dans le réservoir d'une hauteur quelconque H est égale à la masse $\frac{H \pi A^2}{4}$ multipliée par une certaine vitesse V'. Cette quantité de mouvement

est donc exprimée par

$$\frac{H \pi A^2}{4} \cdot V'.$$

Il est évident de plus que cette quantité de mouvement est précisement égale à la somme de toutes les quantités de mouvement de la tranche superficielle du fluide prise à chaque instant sur tous les points successifs de la hauteur H.

La quantité de mouvement de la tranche superficielle du fluide à une hauteur quelconque y au-dessus de l'orifice du tube, a pour expression,

$$-dy \frac{\pi A^2}{4} \cdot V,$$

c'est-à-dire en substituant à V sa valeur,

$$-dy \frac{\pi A^2}{4} \cdot \frac{D^2}{A^2} \sqrt{\frac{gD}{4lb}} \times (\sqrt{y-c}),$$

on a, par conséquent, l'équation

$$\frac{H \pi A^2}{4} \cdot V' = \frac{\pi A^2}{4} \cdot \frac{D^2}{A^2} \times \sqrt{\frac{gD}{4lb}} \int -dy \sqrt{y-c};$$

laquelle intégrée donne

$$H V' = \frac{D^2}{A^2} \sqrt{\frac{gD}{4lb}} \left(-\frac{2}{3}(y-c)^{\frac{3}{2}}\right) + F.$$

La constante F est telle que cette quantité de mouvement soit nulle au commencement de l'écoulement, c'est-à-dire lorsque $y = h'$, on a donc enfin

$$H V' = \frac{D^2}{A^2} \sqrt{\frac{gD}{4lb}} \left(\frac{2}{3}\left((h'-c)^{\frac{3}{2}} - (h''-c)^{\frac{3}{2}}\right)\right);$$

en supposant que h'' soit la hauteur au-dessus de l'orifice à la dernière limite de l'écoulement observé.

Considérant de plus que dans cette hypothèse $H = h' - h''$ on aura

$$V' = \frac{2D^2}{3A^2}\sqrt{\frac{gD}{4lb}}\left(\frac{(h'-c)^{\frac{3}{2}} - (h''-c)^{\frac{3}{2}}}{h'-h''}\right)$$

pour l'expression de la vîtesse moyenne de la tranche superficielle dans le réservoir cylindrique, mais en appelant u' la vîtesse moyenne dans le tube on a

$$\frac{V'A^2}{D^2} = u',$$

donc

$$u' = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{gD}{4lb}}\left(\frac{(h'-c)^{\frac{3}{2}} - (h''-c)^{\frac{3}{2}}}{h'-h''}\right)$$

et par conséquent

$$\sqrt{b} = \frac{2}{3u'}\sqrt{\frac{gD}{4l}}\left(\frac{(h'-c)^{\frac{3}{2}} - (h''-c)^{\frac{3}{2}}}{h'-h''}\right).$$

Il faut remarquer maintenant que la vîtesse moyenne u' dans le tube est égale à la quantité de fluide qui s'écoule par seconde, divisée par la section transversale du tube, de sorte qu'en appelant Q cette dépense avec la vîtesse u' on a

$$Q = u' \times \frac{D^2\pi}{4},$$

c'est-à-dire,

$$u' = \frac{4Q}{\pi D^2};$$

de plus, nommant t la durée d'une observation, et M le volume du fluide dépensé pendant ce temps, on a évidemment

$$Q = \frac{M}{t},$$

ou bien à cause de $M = \frac{\pi A^2}{4}(h' - h'')$,

$$Q = \frac{\pi A^2 (h' - h'')}{4t},$$

et par conséquent

$$u' = \frac{A^2}{D^2}\left(\frac{h' - h''}{t}\right);$$

donc enfin

$$\sqrt{b} = \frac{2}{3}\frac{D^2 t}{A^2}\sqrt{\frac{gD}{4l}}\left(\frac{(h' - c)^{\frac{3}{2}} - (h'' - c)^{\frac{3}{2}}}{(h' - h'')^2}\right)$$

équation au moyen de laquelle il est aisé de déterminer les valeurs de b correspondantes à chaque observation.

Appliquant d'abord cette formule aux observations du tableau n° XX pour lesquelles on a :

$$\begin{aligned} A &= 0^m 0405, \\ D &= 0.001767, \\ l &= 0.939, \\ h' &= 0.182, \\ h'' &= 0.126, \\ h' - h'' &= 0.056, \\ c &= 0.0085, \\ t &= 80'', \end{aligned}$$

on trouve

$$b = 0{,}005471.$$

Pour appliquer ensuite cette même formule aux observations du tableau n° XXI faites sur le même tube, mais dans lesquelles le diamètre A du réservoir $= 0{,}076$, il faut prendre pour t la durée moyenne de toutes les observations sous la même charge, et pour h' et h'', les hauteurs de charge correspondantes au commencement et à la fin de chaque obser-

vation; on a d'ailleurs, comme dans le tableau précédent, $c = 0{,}0085$.

En procédant ainsi on obtiendra les trois valeurs suivantes:

$$b = 0^{m}005536,$$
$$b = 0.005419,$$
$$b = 0.005405,$$

Ces trois valeurs de b comparées à celle déduite du tableau nº XX sont sensiblement identiques : ce qui doit avoir lieu en effet puisque le même tube ayant servi aux observations que présentent les deux tableaux, le frottement du mercure contre les parois de ce tube, c'est-à-dire la résistance qu'il a éprouvée à s'y mouvoir a été nécessairement la même.

Ajoutant ensemble les quatre coëfficiens b déduits des tableaux nº XX et nº XXI, et prenant leur valeur moyenne on la trouve $= 0{,}005455$.

Si l'on calcule le coëfficient b au moyen des observations du tableau nº XXII sur le tube nº 2, observations dans le cours desquelles les hauteurs de charge initiales et finales sont les mêmes que dans le tableau nº XXI et pour lesquelles on a d'ailleurs:

$$A = 0^{m}076,$$
$$D = 0.001122,$$
$$l = 0.357,$$
$$c = 0.0095,$$

on trouve

$$b = 0.006080,$$
$$b = 0.007236,$$
$$b = 0.006374,$$

valeurs peu différentes entre elles, et dont la moyenne

$=0{,}006563$ diffère d'un sixième à-peu-près de celle trouvée ci-dessus pour le tube n° 1.

Dans les observations du tableau suivant sur le tube n° 3 les quantités A, h' et h'', conservent leurs valeurs, et on a spécialement

$$D = 0^m 002045,$$
$$l = 0.75,$$
$$c = 0.006,$$

ces observations donnent :

$$b = 0^m 004555,$$
$$b = 0.004994,$$
$$b = 0.005069,$$

et pour valeur moyenne $b = 0{,}004872$.

Enfin déduisant ce même coëfficient du tableau n° XXIV, d'après les observations faites sur le tube n° 4, pour lesquelles A, h' et h' restent les mêmes que ci-dessus et auxquelles correspondent

$$D = 0^m 001788,$$
$$l = 0.83,$$
$$c = 0.0060,$$

on trouve

$$b = 0.005038,$$
$$b = 0.005075,$$

dont la valeur moyenne est 0,005056.

On voit, en comparant les valeurs de b que nous venons de calculer, que ces valeurs sont sensiblement identiques

pour le même tube, mais qu'elles deviennent différentes lorsqu'on passe d'un tube à l'autre. On a en effet

Pour le tube n° 1, $b = 0^{m}005455$,
Pour le tube n° 2, $b = 0.006563$,
Pour le tube n° 3, $b = 0.004872$,
Pour le tube n° 4, $b = 0.005056$,

Or les différences que l'on remarque entre les valeurs s'expliquent naturellement par celles qui peuvent se trouver dans le degré de poli de la surface intérieure des tubes dont les aspérités, quoique imperceptibles à la vue, n'en existent pas moins et peuvent être rendues sensibles par les effets du frottement du mercure.

Quant à la nature de la quantité représentée par le coëfficient b, il est évident, à la simple inspection de la formule générale

$$g\frac{D.(h'-h'')}{4l} = bu^2,$$

que ce coëfficient se réduit à une quantité numérique, autrement les deux nombres de cette formule ne seraient point homogènes.

Reprenons celle d'où nous avons déduit la valeur de b.

$$\sqrt{b} = \frac{2}{3}\frac{D^2 t\sqrt{gD}\left((h'-c)^{\frac{3}{2}}-(h''-c)^{\frac{3}{2}}\right)}{A^2\sqrt{4l}\,(h'-h'')^2}.$$

On en tire, pour la valeur du temps que le mercure emploie à s'abaisser d'une hauteur quelconque, $h'-h''$ dans le réservoir cylindrique

$$t = \frac{3}{2}\left(\frac{(h'-h'')^2}{(h'-c)^{\frac{3}{2}}-(h''-c)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{A^2}{D^2}\sqrt{\frac{4lb}{gD}},$$

équation où l'on voit que la température ou la densité du fluide n'entre pour rien. Elle indique seulement que la durée de l'écoulement d'une quantité donnée de liquide, est en raison directe de la racine quarrée du coëfficient b, et en raison inverse de la fonction

$$(h'-c)^{\frac{3}{2}}-(h''-c)^{\frac{3}{2}}$$

dans laquelle la quantité c dépend tout-à-la-fois de la nature du fluide et du degré de poli de l'intérieur du tube.

Si l'on abandonne le fluide dans le vase cylindrique à son écoulement spontané par le tube capillaire, jusqu'à ce que la hauteur de la charge sur l'orifice ait atteint sa dernière limite; limite qui est aussi celle de l'écoulement, parce qu'alors la pression sur l'orifice du tube contre-balance exactement le frottement qui a lieu le long de ses parois intérieures, on aura dans la formule précédente $h''=c$, et elle deviendra

$$t=\frac{3}{2}\sqrt{h'-h''}\cdot\frac{A^2\sqrt{4lb}}{D^2\sqrt{gD}},$$

c'est-à-dire que la durée de l'écoulement est proportionnelle à la racine quarrée du produit de la hauteur dont le fluide est descendu par le coëfficient b; ce qui donne un moyen facile de déterminer ce coëfficient.

On a en effet, dans cette hypothèse,

$$\sqrt{b}=\frac{2tD^2\sqrt{gD}}{3A^2\sqrt{4l}\sqrt{h'-h''}}$$

valeur dont la détermination rigoureuse ne dépend plus que de l'observation faite, avec plus ou moins d'exactitude, de la durée de l'écoulement.

RÉSUMÉ.

Les expériences dont je viens de rendre compte à l'Académie, démontrent que la propriété d'adhérer à la surface de certains corps solides, et la propriété contraire de se refuser à contracter cette adhérence, établissent pour le mouvement linéaire des fluides des lois parfaitement distinctes, et qui sont exprimées par des équations différentes.

Lorsque le fluide adhère à la paroi des tubes par lesquels il s'écoule, c'est-à-dire lorsqu'il tend à se combiner avec la surface qu'il touche, il la mouille sur une épaisseur plus ou moins considérable, et cette épaisseur, pour un même fluide et pour un même tube, augmente suivant une certaine fonction de la densité ou de la température de ce fluide; effet qui paraît être un cas particulier de l'attraction universelle dont l'action s'exerce toujours, comme on sait, proportionnellement aux masses.

Le diamètre des tubes capillaires dans lesquels se meut un fluide susceptible d'en mouiller les parois, se trouvant ainsi diminué de la double épaisseur de la couche qui le tapisse, l'écoulement d'un même volume de fluide par ce tube, sous une charge déterminée, est nécessairement plus ou moins rapide suivant que la température est plus élevée ou plus basse.

C'est par cette raison que le mouvement linéaire des différens fluides qui circulent dans les corps organisés est soumis d'une manière si sensible aux influences de la chaleur et du froid.

L'action de divers liquides sur la surface d'un même solide étant variable suivant leur nature, il arrive qu'à tempé-

rature égale, la couche de tel fluide qui mouille la surface d'un certain corps est plus ou moins épaisse que la couche de tel autre fluide qui jouit aussi de la propriété de mouiller cette même surface, et cela indépendamment de la viscosité spécifique de ces fluides, c'est-à-dire, l'adhérence qui retient leurs molécules entre elles.

C'est ainsi que l'alcohol adhère au verre sur une plus grande épaisseur que l'eau quoiqu'il soit sensiblement moins visqueux suivant les physiciens; tandis qu'une dissolution assez concentrée de nitrate de potasse, dont la viscosité est évidemment plus grande que celle de l'eau, adhère cependant au verre sur une épaisseur beaucoup moindre.

Tous les phénomènes dus à l'influence de la température dans l'écoulement linéaire des fluides qui ont la propriété de mouiller les canaux capillaires où ils se meuvent disparaissent entièrement dans l'écoulement linéaire des fluides dépourvus de cette propriété. Ainsi les produits de l'écoulement du mercure par un tube capillaire de verre, sous une charge déterminée, sont les mêmes à quelque température que ce soit. Comme il ne reste point alors de couche fluide adhérente à la paroi intérieure du tube, son diamètre effectif ne peut subir d'altération par les variations d'épaisseur de cette couche. Ainsi l'explication que nous avons donnée des phénomènes du mouvement linéaire des fluides adhérens, se trouve confirmée par les phénomènes du mouvement de ceux qui ne le sont pas, et notre théorie en reçoit un nouvel appui.

Nous avons fait voir au surplus que la résistance au mouvement qu'éprouve dans un canal capillaire un fluide qui ne le mouille point, est analogue à la résistance que le frottement oppose au mouvement des corps solides quand ils

glissent les uns sur les autres, résistance qui altère plus ou moins promptement les surfaces entre lesquelles elle s'exerce.

Si donc les fluides qui circulent dans les différens systêmes organiques n'avaient pas la propriété de mouiller les canaux qui les contiennent, ces canaux seraient bientôt usés par le frottement exercé contre leurs parois; l'existence de ces systêmes soumise à l'action continue de cette cause de destruction n'éprouverait dans sa courte durée aucune des modifications innombrables qu'éprouvent les corps organisés de la nature par l'influence de la chaleur; ainsi tous les êtres que son action semble vivifier, perdraient leurs plus précieuses fonctions et ne présenteraient en quelque sorte qu'un monde inanimé.

Placés dans un ordre de choses où tout est mystère autour de nous, lorsqu'à l'aide de l'expérience ou du calcul nous essayons de soulever le voile sous lequel la nature se cache, il est rare que nous parvenions à découvrir ses secrets, mais du moins nous sommes presque toujours sûrs de rencontrer dans le cours de nos recherches quelque nouveau sujet d'admirer la simplicité des moyens qu'elle emploie, et la perfection de ses œuvres.

MÉMOIRE

Sur l'écoulement de l'Éther et de quelques autres fluides par des tubes capillaires de verre.

PAR M. GIRARD.

Lu à l'Académie le 27 octobre 1817.

L'ORSQUE j'ai rendu compte à l'Académie au commencement de cette année d'une suite d'expériences sur l'écoulement linéaire de différens fluides, par des tubes capillaires de verre, je n'avais pas eu l'occasion de soumettre l'éther aux mêmes épreuves; je vais rapporter quelques observations sur l'écoulement de cette liqueur comparé à celui de l'alcohol et de l'eau, dans le même tube et sous la même charge de fluide.

J'ai implanté horizontalement dans la paroi verticale d'un vase cylindrique de cristal de 0,031 millimètres de diamètre, un tube de verre de $0^m,939$ millimètres de longueur, et de $0^m,001767$ millimètres d'ouverture, le même dont je m'étais servi précédemment; j'ai tracé sur la surface du réservoir cylindrique deux traits horizontaux, l'un à 95, l'autre à 35 millimètres seulement au-dessus de l'orifice du tube, de sorte que ces deux traits étaient séparés l'un de l'autre par un intervalle de 60 millimètres.

Les différens fluides, mis en expérience, ont été versés dans ce réservoir jusqu'au-dessus du trait supérieur que porte sa paroi. Les laissant ensuite écouler librement par le tube capillaire horizontal qui y était implanté, on a observé le nombre de secondes que leur surface a mis à s'abaisser de la hauteur de 60 millimètres comprise entre les deux traits. De cette manière il est sorti du vase, pendant chacune de ces observations, un même volume de liquide de 45 centimètres cubes $\frac{3}{10}$ à très-peu-près; et, attendu la linéarité du mouvement, cet écoulement a eu lieu sous une charge moyenne de 65 millimètres.

La température des liquides, mesurée sur le thermomètre centigrade, était à 12 degrés pendant les expériences dont voici le résultat :

1° L'éther sulphurique, à 60 degrés de l'aréomètre de Beaumé, s'est écoulé en 101 secondes, durée moyenne prise entre trois expériences consécutives qui ne différaient que de quelques secondes entre elles.

2° L'alcohol rectifié, à 40 degrés du même aréomètre, s'est écoulé en 856 secondes.

3° L'eau distillée, en 349 secondes.

On voit d'abord que les durées de l'écoulement d'un même volume de ces trois liquides, croissent dans l'ordre suivant: éther, eau, et alcohol, et dans les rapports de 101 à 349, et à 856.

On voit ensuite que les durées de l'écoulement de l'eau et de l'alcohol, dans les observations que nous venons de rapporter, sont entre elles précisément dans le même rapport que nous avions déja conclu de nos expériences précédentes faites sur ces deux liquides à la même température de 12

degrés; par conséquent ces premières expériences, et nos observations actuelles qui ont eu lieu sous une charge différente, se confirment les unes par les autres.

Si l'on compare la durée de l'écoulement de l'eau à celle de l'écoulement de l'éther, on voit qu'elles sont entre elles dans le rapport de 349 à 101, ou d'environ 7 à 2, de sorte que le produit de l'écoulement de l'eau que, dans les mêmes circonstances nous avions trouvé jusqu'à-présent le plus considérable de tous, à l'exception du produit de l'écoulement de quelques dissolutions de nitrate de potasse à certaines températures, n'est à 12 degrés que les $\frac{2}{7}$ du produit de l'écoulement de l'éther.

Enfin, comparant les durées de l'écoulement de l'éther et de l'alcohol, on observe qu'elles sont entre elles comme 101 à 856', c'est-à-dire à très-peu-près dans le rapport de 2 à 17.

Ainsi les produits de l'écoulement linéaire de l'éther et de l'alcohol, deux fluides qui semblent se rapprocher par leurs pesanteurs spécifiques, leur degré de fluidité, et leurs autres propriétés physiques, diffèrent beaucoup plus entre eux qu'ils ne diffèrent respectivement du produit de l'écoulement linéaire de l'eau, qui est beaucoup plus dense et qui semble n'avoir avec l'éther et l'alcohol d'autre propriété commune que la liquidité.

Ces phénomènes ne peuvent être expliqués qu'en admettant, suivant notre théorie, qu'une couche de ces fluides reste adhérente à la paroi intérieure du tube et en restreint plus ou moins l'ouverture selon qu'elle est plus ou moins épaisse, ce qui dépend du degré d'affinité ou de l'attraction mutuelle du fluide et de la matière du tube.

Le diamètre de ce tube étant diminué de la double épaisseur de la couche fluide qui le tapisse intérieurement, la force retardatrice par laquelle l'action de la gravité est contrebalancée dans le filet fluide en mouvement n'est plus due, comme cela suit évidemment de la même théorie, qu'à la cohésion des molécules de la surface de ce filet, lorsqu'il se détache de la couche immobile sur laquelle il glisse.

Ceci nous conduit à rappeler que les produits de l'écoulement des liquides, par lesquels la matière des tubes est susceptible d'être mouillée, se trouvent toujours modifiés par deux causes essentiellement distinctes : l'une, est l'affinité du fluide et de la matière du tube, affinité en vertu de laquelle le diamètre de celui-ci subit une réduction plus ou moins forte; l'autre, est la cohésion mutuelle des molécules fluides.

Appliquant ces considérations à l'écoulement de l'éther, dont la durée n'est que les $\frac{2}{7}$ environ du temps employé à l'écoulement d'un même volume d'eau et un peu moindre que les $\frac{2}{17}$ seulement du temps employé à l'écoulement d'un même volume d'alcohol, il resterait à rechercher comment les deux causes distinctes que nous venons d'indiquer agissent séparément pour occasionner cette différence dans le produit de l'écoulement de l'éther comparé à celui de l'eau et de l'alcohol.

Cette différence provient-elle en effet de ce que l'action de la surface du verre, s'étendant à une très-petite distance sur l'éther qui est en contact avec elle, l'épaisseur de la couche de ce fluide qui tapisse l'intérieur du tube, est beaucoup moindre que l'épaisseur de la couche d'eau ou d'alcohol qui le tapisse à la même température, ce qui laisse réellement à ce tube une ouverture d'autant plus grande, ou pro-

vient-elle de ce que la cohésion des molécules d'éther entre elles est très-petite ? La facilité avec laquelle cette liqueur se vaporise porte naturellement à croire que ces deux causes concourent à augmenter le produit de son écoulement, car nous avons fait voir ailleurs que lorsque l'eau, par exemple, est au moment de se réduire en vapeurs, ce qui la rapproche de l'état habituel de l'éther, la couche d'eau qui tapisse l'intérieur du tube est extrêmement mince. D'un autre côté il est clair que les molécules d'un liquide quelconque sont d'autant plus distantes et par conséquent d'autant moins adhérentes entre elles que ce fluide est plus près de passer à l'état aériforme, il est donc extrêmement probable que la couche d'éther qui tapisse l'intérieur du tube, et qui lui reste adhérente pendant le mouvement, est plus mince que la couche d'eau ou d'alcohol qui la tapisse à la même température en même temps que la cohésion des molécules d'éther entre elles est moindre que celle des molécules des deux autres liquides.

Or toutes nos expériences concourent à prouver que l'action de la surface intérieure d'un tube sur un fluide quelconque qui a la propriété de le mouiller, et l'action de ce fluide sur lui-même sont d'autant moindres que sa température est plus élevée, ainsi pour parvenir à distinguer l'influence respective de ces deux actions dans les phénomènes du mouvement linéaire de l'éther, il fallait mesurer les produits de l'écoulement de cette liqueur à différentes températures.

Nous venons de dire qu'un volume de 45 centimètres cubes d'éther, à 12 degrés du thermomètre centigrade, s'écoule de notre appareil en .... 101"

Ayant élevé cette liqueur à 30 degrés, le même vo-

lume s'écoule en.............................. 90″

Enfin à 43 degrés, il s'écoule en................ 80

A cette température l'éther entrait en ébullition, par conséquent la couche adhérente à l'intérieur du tube, était infiniment mince et il n'éprouvait de résistance à son mouvement que celle due à la cohésion de ses parties, ou, ce qui revient au même, à leur viscosité.

En concluant des expériences que nous avons rapportées dans nos précédens Mémoires sur l'écoulement de l'eau à 99 degrés de température, la durée de l'écoulement d'un volume de 45 centimètres cubes de ce liquide à la même température dans l'appareil que nous avons décrit au commencement de celui-ci, on trouve cette durée de 107″.

Ainsi les viscosités spécifiques de l'eau et de l'éther au moment où chacun de ces deux liquides entrent en ébullition sont entre elles dans le rapport de 107″ à 80″. Et comme nous avons trouvé celle de l'eau représentée alors par le nombre 0^{m},00068878, il s'ensuit que celle de l'éther pris au moment de bouillir, doit être représentée par 0,00051497.

Or nous avons démontré ailleurs que la cohésion mutuelle des molécules d'un même fluide à différentes températures croissait comme le cube des densités de ce fluide à ces températures différentes. Si donc nous connaissions la loi de variabilité des densités de l'éther entre les deux limites de son état liquide, il nous serait facile de déterminer sa viscosité à 12 et à 30 degrés du thermomètre centigrade, et par suite, l'épaisseur de la couche de cette liqueur qui tapissait l'intérieur du tube pendant nos expériences à ces températures, ce qui nous permettrait d'attribuer leurs effets res-

pectifs à chacune des deux causes qui modifient le mouvement linéaire de l'éther; mais les physiciens ne s'étant point occupés jusqu'à-présent de rechercher la loi de variabilité des densités de l'éther entre les deux limites de sa liquidité, nous manquons des données nécessaires pour assigner sa viscosité à une température quelconque, et par conséquent pour déterminer avec précision l'épaisseur de la couche de ce liquide qui, à cette température, reste adhérente à la paroi intérieure du tube capillaire où il se meut.

Ce que nous venons de dire montre assez combien il serait important de connaître la loi suivant laquelle varie la densité des différens liquides qu'on est dans le cas de mettre à l'épreuve, depuis le premier, jusqu'au dernier terme de leur liquidité. Le travail que l'on entreprendra pour la détermination de cette loi ne serait pas seulement utile dans l'espèce de recherche qui nous occupe, mais il le serait encore, comme nous aurons occasion de le faire voir dans un prochain Mémoire, pour la discussion d'une multitude de phénomènes où des molécules de substances solides se trouvent suspendues dans des liquides susceptibles de mouiller leurs surfaces. En attendant que la science soit plus avancée sur ce point, il convient de développer ici une considération de la plus haute importance d'après laquelle il sera indispensable d'ordonner entre eux les résultats du travail que nous venons d'indiquer.

La force plus ou moins grande avec laquelle les molécules intégrantes de différens liquides s'attirent mutuellement ou adhèrent les unes aux autres constitue leur viscosité spécifique, mais la viscosité d'un même liquide varie avec la

température depuis le terme de sa *congélation* où cette viscosité est parvenue à son *maximum*, jusqu'à celui de sa *vaporisation* où elle est parvenue à son *minimum*.

Les termes de la congélation et de la vaporisation de différens fluides indiqués sur une échelle thermométrique quelconque à des points, différens sont néanmoins semblablement placés sur la portion de cette échelle dans laquelle chacun de ces fluides existe à l'état liquide, puisque ces points sont les deux extrémités de cette portion d'échelle et qu'ils indiquent le passage de chacun de ces liquides, soit à l'état solide, soit à l'état aériforme; ainsi l'on peut déterminer la viscosité spécifique des liquides en les considérant à leur dernière limite vers l'un de ces états. Mais par cela même que ces dernières limites ne correspondent point pour tous les fluides au même degré du thermomètre, on conçoit que les mêmes degrés de température ne peuvent servir à indiquer des degrés de viscosités comparables dans des fluides dont les états de liquidité ne sont point renfermés sur l'échelle thermométrique entre des limites communes; ou, pour abréger, qui n'ont point *le même intervalle thermométrique*.

Par exemple, les deux termes extrêmes de l'état liquide de l'eau sont indiqués par zéro et 100 degrés sur le thermomètre centigrade.

On sait, d'un autre côté, que l'éther se congèle et se cristallise à 43°,75 au-dessous de zéro, et qu'il entre en ébullition à 41°,25 au-dessus.

L'état liquide de l'eau s'étend donc dans un intervalle de 100 degrés, et l'état liquide de l'éther, dans un intervalle de 85; mais comme l'origine de ce second intervalle est re-

culée de 43°, 75 au-dessous de l'origine du premier, il s'ensuit que le 12e degré au-dessus de zéro correspond aux $\frac{12}{100}$ de l'intervalle entier compris entre les deux limites de la liquidité de l'eau, et aux $\frac{55,75}{85}$, ou aux $\frac{65}{100}$ à très-peu-près de l'intervalle compris entre les deux limites de la liquidité de l'éther. Lorsque nous avons comparé les produits de l'écoulement de l'eau et de l'éther à la température fixe de 12 degrés, ces deux fluides n'étaient donc point semblablement placés sur l'intervalle thermométrique dans lequel ils existent à l'état liquide, et par conséquent les produits de leur écoulement, en tant qu'il dépendent de la viscosité des fluides et de leur affinité avec la matière du tube, ne sont pas plus comparables entre eux que si, dans l'hypothèse où l'état de liquidité de l'eau et de l'éther aurait les mêmes limites sur l'échelle thermométrique, ces produits d'écoulement eussent été comparés à des degrés de température différens.

Pour rendre comparables les produits de l'écoulement de l'eau et de l'éther, entre les deux limites de leur liquidité, il faut donc prendre ces deux liquides à des degrés de température qui soient semblablement placés sur la partie de l'échelle thermométrique dans l'étendue de laquelle ils existent à cet état; ainsi, lorsque l'éther mis en expérience est à 12 degrés du thermomètre, il faut que la température de l'eau qu'on veut lui comparer soit portée à 65 degrés.

J'ai en conséquence élevé l'eau à cette température dans notre appareil, et j'ai observé que sa surface employait 135″ à descendre de la hauteur comprise sur la paroi du réservoir entre les deux indices parallèles qui y sont tracés.

Les durées de l'écoulement d'un même volume d'eau et d'éther, placés l'un et l'autre aux $\frac{65}{100}$ de l'intervalle thermométrique dans lequel ils existent à l'état liquide, sont donc entre elles comme 135 est à 101.

Nous avons trouvé plus haut qu'au terme de cet intervalle le plus voisin de leur vaporisation les durées de l'écoulement de ces deux liquides étaient entre elles comme 107 et 80, c'est-à-dire, précisément dans le même rapport que les nombres 135 et 101 par lesquels sont exprimés en secondes les temps de leur écoulement aux $\frac{65}{100}$ de leurs intervalles thermométriques respectifs.

Comparant de même l'expérience que nous avons faite sur l'écoulement de l'éther à 30 degrés de température, c'est-à-dire aux $\frac{65}{100}$ à très-peu-près de son intervalle thermométrique, à une expérience faite sur l'écoulement de l'eau à 87 degrés, on a trouvé la durée de l'écoulement de l'éther de 90″, et celle de l'eau de 121″, nombres qui sont encore entre eux dans le même rapport de 80 à 107, et de 101 à 135; d'où l'on peut conclure que les durées d'écoulement d'un même volume d'eau et d'éther, par un même appareil, sont proportionnelles entre elles lorsque ces écoulemens ont lieu à des points de température semblablement placés sur les échelles thermométriques de ces deux liquides.

Les mêmes raisonnemens que nous venons de faire sur l'éther sont évidemment applicables à l'alcohol quand on compare son écoulement linéaire à celui de l'eau.

En effet, suivant les observations faites en Laponie, par Maupertuis et l'abbé Outhier (1), l'alcohol se congèle à 31°,5

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1737, pag. 419.

au-dessous de zéro, du thermomètre de Réaumur, ce qui revient à 40 degrés du thermomètre centigrade.

On sait de plus que cette liqueur entre en ébullition à 83 degrés du même thermomètre.

L'étendue de l'échelle thermométrique, dans laquelle se renferme la liquidité de l'alcohol, est donc de 123 degrés, tandis que la liquidité de l'eau se renferme dans une étendue de 100 degrés seulement; mais comme l'origine du premier intervalle se trouve reculée de 40 degrés au-dessous de l'origine du second, il s'ensuit que le terme fixe de 12 degrés, qui indique la température commune à laquelle nos expériences ont été faites, est placé au $\frac{52}{123}$, ou au $\frac{40}{100}$ du premier espace, tandis qu'il est placé au $\frac{12}{100}$ seulement du deuxième degré. Pour rendre comparable l'écoulement de l'eau à celui de l'alcohol à 12 degrés il faut donc élever le premier de ces liquides à 40 degrés.

Il résulte de l'expérience que nous en avons faite que la durée de l'écoulement du même volume de 45 centimètres cubes d'eau à cette température est de 191 secondes.

Ainsi les durées de l'écoulement de l'alcohol et de l'eau, aux $\frac{40}{100}$ de leurs intervalles thermométriques respectifs, sont entre elles comme 856 et 191, tandis qu'elles sont comme 856 à 349 à la température fixe de 12 degrés.

On sait que les durées de l'écoulement de différentes liqueurs sont proportionnelles à leurs viscosités spécifiques au moment où elles entrent en ébullition.

Pour déterminer celle de l'alcohol j'ai élevé sa température à 80 degrés et j'ai trouvé 300", pour la durée de l'écoulement d'un volume de 45^{cent}, 3 cubes.

La durée de l'écoulement de l'eau, au moment de bouillir,

avait été trouvée précédemment de 107″. Ainsi les viscosités spécifiques de l'eau et de l'alcohol, au dernier terme de leur état liquide le plus près de leur vaporisation, sont entre elles comme les nombres 107 et 300, d'où l'on voit que l'alcohol est réellement plus visqueux que l'eau, ce qui est contraire à ce que les physiciens avaient généralement admis jusqu'ici.

Qu'on se rappelle maintenant que les durées de l'écoulement de l'eau et de l'alcohol, observées au $\frac{40}{100}$ de leurs intervalles thermométriques, sont entre elles dans le rapport de 191 à 856; or ce rapport est beaucoup moindre que celui de 107 à 300 que nous avons trouvé au terme de leur vaporisation. La proportionnalité que nous avons eu occasion de remarquer entre les écoulemens de l'eau et de l'éther, à des points semblablement placés sur leur échelle, n'existe donc point entre les écoulemens de l'eau et de l'alcohol : de sorte que si l'on décrit sur les intervalles thermométriques de chacune de ces trois liqueurs, pris pour axes des abscisses, des courbes ayant pour ordonnées les durées d'écoulement correspondant aux différens points de ces intervalles, les deux courbes de l'eau et de l'éther marcheront à très-peu-près parallèlement entre elles; tandis que la courbe de l'alcohol, à partir du terme de sa vaporisation, s'éloignera de son axe avec une rapidité beaucoup plus grande, et telle que si nous avions pu faire descendre la température de cette liqueur à des degrés de froid voisins du terme de sa congélation, il est extrêmement probable qu'avant d'arriver à ce terme, le mouvement de la liqueur aurait cessé dans notre tube, soit par l'augmentation d'épaisseur de la couche qui serait restée adhérente à sa paroi, soit par l'accroissement de viscosité que la liqueur aurait acquise : l'alcohol est donc d'autant moins

propre à indiquer la température dans les degrés inférieurs voisins de sa congélation, que le tube du thermomètre à la formation duquel il servirait, serait plus capillaire. Car par la même raison que des dissolutions salines se cristallisent dans ces tubes, à des températures plus élevées que celles auxquelles la cristallisation a lieu lorsque les dissolutions sont contenues dans de grands vases et que l'eau, dont la transparence est troublée par la suspension de molécules argileuses, se gèle plutôt que lorsqu'elle est parfaitement limpide; la congélation de l'alcohol dans un tube de thermomètre doit s'opérer avant que le froid soit descendu au degré qui la produirait si cette liqueur était contenue dans un espace indéfini.

Cette remarque prouve, pour le dire en passant, qu'un thermomètre ne peut jouir de toute la sensibilité à laquelle il serait desirable qu'il parvînt, à moins que la liqueur employée dans sa construction ne soit tout-à-fait dénuée de la faculté de mouiller les parois du tube de cet instrument, et c'est ce qui donne encore au thermomètre à mercure un avantage précieux sur tous les autres, puisque, comme nos expériences le prouvent, cette liqueur à la propriété de se mouvoir dans les tubes capillaires de verre avec la même facilité à quelque température que ce soit.

Nous venons de dire que la viscosité de l'eau, et celle de l'alcohol, sont entre elles cemme les nombres 107 et 300; ainsi la première ayant pour expression $0^{m},00068878$, la seconde sera exprimée par $0^{m},00193116$.

J'ai voulu déterminer par des expériences analogues à celles que je viens de rapporter la viscosité du lait.

Voici les résultats de ces expériences:

La durée de l'écoulement d'un volume constant de 45 centimètres cubes a été à 14 degrés de température, de.. 642″
A 27 degrés, de.............................. 454
A 57 degrés, de.............................. 254
Enfin à 85 degrés, terme le plus près de l'ébullition qu'on ait pu atteindre, de........................ 189

Ainsi la viscosité du lait à ce terme est à celle de l'eau dans le rapport de 189 à 107, ou bien exprimé par 0^m,00121850.

Les viscosités spécifiques ou les forces avec lesquelles adhèrent entre elles les molécules des divers fluides que nous avons soumis à l'épreuve à l'état de liquidité le plus voisin de l'ébullition sont donc :

1° Pour l'éther.................. 0,00051,
2° Pour l'eau.................... 0,00068878,
3° Pour le lait.................. 0,00121850,
4° Pour l'alcohol................ 0,00193116,

La gravité terrestre étant représentée par 9,808795 : car j'ai démontré dans un de mes précédens mémoires que ces forces d'adhérence étaient de la même nature que la gravité, et par conséquent devaient être exprimées en unités ou fractions d'unité de même espèce.

Après avoir ainsi déterminé les viscosités de l'éther, de l'eau, et de l'alcohol, j'ai plongé successivement un même tube capillaire d'un millimètre de diamètre à très-peu-près dans ces différentes liqueurs à la température de 12 à 13 degrés; et j'ai trouvé qu'elles s'élevaient au-dessus de leur niveau dans l'ordre suivant :

1° L'éther, de	mil. 6,75,
2° L'alcohol, de	9,02,
3° Le lait, de	11,27,
4° Enfin l'eau, de	13,53.

Or cet ordre est très-différent, comme on voit, de celui des viscosités spécifiques de ces mêmes fluides, ce qui s'accorde évidemment avec l'opinion générale des physiciens et des géomètres suivant laquelle l'élévation des liqueurs, au-dessus de leur niveau dans les tubes capillaires, ne dépend pas seulement de la viscosité de ces liqueurs, mais encore de leur degré d'affinité avec la substance solide du tube où le phénomène se manifeste.

MÉMOIRE

Sur l'utilité des lois de la polarisation de la lumière, pour reconnaître l'état de cristallisation et de combinaison, dans un grand nombre de cas où le système cristallin n'est pas immédiatement observable ;

Lu à l'Académie des Sciences le 22 juin 1818,

PAR M. BIOT.

QUAND on considère les formes géométriques que présentent les substances minérales, dans cet état d'isolement, et l'on pourrait dire d'individualité, où on leur donne le nom de cristaux, la seule vue de leurs faces planes et de leurs arêtes rectilignes exclut l'idée que ces corps puissent être des amas confus de matière, et décèle l'influence lente et tranquille d'attractions régulières qui ont présidé à leur formation. Nous voyons des phénomènes analogues s'opérer sous nos yeux dans la précipitation des dissolutions salines et dans la solidification des métaux fondus ; ainsi l'analogie porte à penser que de semblables circonstances ont déterminé la formation des cristaux naturels. Mais, quoique l'état primitif de fluidité de la terre, indiqué par sa forme applatie, et par la régularité des variations de la pesanteur à sa surface, fortifie cette induction, il ne serait pas philosophique

35.

de la pousser jusqu'à l'identité; car un tel état a dû être accompagné par des circonstances de pression et de température fort différentes de celles que nous voyons aujourd'hui, ou que nous pouvons aujourd'hui réaliser; et leur concours, modifiant les effets des forces chimiques, a pu créer des produits, et déterminer des modes d'aggrégation fort différens de ceux qui naîtraient par le seul effort des affinités, dans une cristallisation libre et non influencée. L'observation de ces produits, tels qu'on les rencontre dans la nature, est donc par cela même d'un très-haut intérêt; et les lois que l'on peut découvrir dans leur composition, ou dans leur texture, ont des conséquences très-fécondes. Or, en examinant, en disséquant pour ainsi dire toutes les formes cristallines, souvent très-multipliées, sous lesquelles chaque substance se rencontre, on a reconnu qu'à une seule exception près, dont nous parlerons plus bas, toutes ces apparences diverses peuvent, lorsque la composition est identique, être géométriquement représentées par des aggrégations de petites molécules, toutes d'une même forme, apposées les unes aux autres par leurs faces, suivant des lois déterminées d'arrangement. Ce *solide générateur* a été appelé la *forme primitive* de chaque substance. Personne n'ignore à quel point de perfection M. Haüy a porté cette géométrie minéralogique, et quel heureux usage il en a fait pour la distinction des espèces minérales. Il n'a pas seulement assigné à chaque substance une forme génératrice qui pût reproduire toutes ses formes secondaires par des lois d'apposition plus ou moins compliquées, ce qui peut s'effectuer d'une infinité de manières, quand on laisse à ces lois toute leur variété mathématique; il a été plus loin, et prenant en considération

toutes les indications physiques, telles que la facilité du clivage, la netteté des joints naturels, leur éclat, leur aspect divers, la disposition symétrique ou non symétrique des faces dérivées, il a entrepris d'assortir à ces caractères les proportions relatives des faces du solide générateur; il s'est en outre astreint à n'employer que les lois d'arrangemens les plus simples possibles, condition avantageuse en elle-même, et à laquelle tant d'heureuses applications dans l'astronomie et la mécanique donnent toujours une grande probabilité de conformité avec la nature. Alors la forme génératrice, choisie par l'ensemble de ces conditions, a pu être envisagée par lui comme quelque chose de plus qu'une simple conception mathématique. Il a pu y voir la configuration réelle ou au moins très-probable des molécules intégrantes mêmes, dont l'aggrégation variée constitue effectivement tous les cristaux de chaque substance; et il a dû être ainsi conduit à considérer l'impossibilité de la réduction à une même forme primitive, toujours sous la restriction de tous ces caractères, comme un indice qui décelait, entre les substances irréductibles, une différence de composition. Tout le monde sait que cette induction a valu à la chimie de ces découvertes. Un seul minéral, l'arragonite, a paru y faire une exception saillante, parce que, avec une forme primitive essentiellement différente de la chaux carbonatée rhomboïdale, avec des caractères physiques qui l'en distinguent d'une manière frappante, on lui a trouvé pendant long-temps une composition exactement pareille dans les analyses les plus précises que l'on pût en faire. De là résultait cette alternative : ou les analyses avaient laissé méconnaître dans l'arragonite quelque principe essentiel à son mode de cristalli-

sation, et qui néanmoins s'y trouvait en assez petite quantité pour échapper à leur précision actuelle, et aux soins minutieux qu'avaient employés leurs auteurs ; ou bien un tel principe n'y existe pas, et alors il faut reconnaître qu'une même substance peut se trouver cristallisée sous deux formes primitives diverses et irréductibles l'une dans l'autre. Pour le dire en passant, il n'y a rien dans les lois connues de la matière, qui s'oppose à un pareil résultat, ou même qui doive le faire supposer invraisemblable : car, d'abord, il n'est pas mathématiquement impossible que des quantités égales de chaux et d'acide carbonique puissent former deux combinaisons physiquement différentes, leurs molécules, par exemple, s'unissant par différens côtés ; et, en second lieu, ne connaissant pas les circonstances physiques dans lesquelles l'arragonite s'est formée, nous ne pouvons nullement savoir si ce n'est pas leur influence qui a forcé les molécules de chaux et d'acide carbonique à ce mode particulier d'aggrégation, ou si quelque agent impondérable ou même matériel l'a déterminée, et s'est dissipé ensuite en nous laissant cette énigme à deviner. Quoi qu'il en soit, un travail nouveau de M. Stromeyer sembla un moment en donner le mot. Cet habile chimiste ayant repris l'analyse de l'arragonite, découvrit dans les cristaux soumis à ses recherches, quelques centièmes de strontiane carbonatée. Malgré la petitesse de cette proportion, rien n'autorisait à exclure l'influence du nouveau principe, et aucune raison ne s'opposait à ce qu'elle suffît pour imprimer à l'arragonite la forme particulière sous laquelle ce minéral se trouve. Mais, pour que sa présence eût produit un pareil effet, il fallait, ou qu'elle fût entrée en combinaison avec la chaux

et l'acide carbonique qui composent presque toute la substance de l'arragonite, de manière à produire un sel de cette forme; ou que, sans se combiner chimiquement avec les molécules de la chaux carbonatée, elle les eût seulement contraintes à se grouper suivant cette loi particulière, *à-peu-près* comme la chaux carbonatée a groupé et agglutiné les grains de sable dans les grès de Fontainebleau. La première supposition, celle d'une combinaison chimique de forme constante, fut rendue infiniment moins probable par des recherches subséquentes : car, en répétant l'analyse de l'arragonite sur des échantillons venus de divers pays, par conséquent tirés de gisemens divers où leur formation a pu être influencée par des circonstances différentes, on a trouvé que la proportion de strontiane carbonatée, quoique toujours fort petite, y est irrégulièrement variable; de sorte que, dans quelques-uns, elle s'élève à quatre centièmes et demi pour cent, tandis que, dans d'autres, elle se réduit à vingt-cinq millièmes, ou même à un millième, ou enfin à des atômes moindres encore, jusqu'à la dernière limite où les réactifs les plus délicats ne peuvent plus en faire apercevoir aucune trace sensible, quoique, dans cette diversité infinie, le même système cristallin et les mêmes propriétés physiques subsistent sans altération apparente (1). Or, s'il était possible que deux substances, la chaux et l'acide carbonique, en gardant toujours la même proportion entre elles, se combinassent chimiquement avec une troisième, telle que la strontiane, en proportion absolument indéfinie,

(1) *Voyez*, dans les Annales de chimie et de physique, les recherches de MM. Bucholz et Meissner, juin 1816, et celles de M. Laugier, avril 1817.

de manière à former autant de sels indépendans les uns des autres, ce que je ne prétends ici ni nier ni affirmer, du moins il est bien vraisemblable que ces produits différeraient dans leur système de cristallisation, ou dans leurs propriétés physiques, ou à-la-fois dans ces deux genres de modifications. Mais si, au contraire, le troisième principe constituant peut varier de proportion dans le composé, et même être réduit à des quantités tellement petites, que sa présence puisse y devenir douteuse, sans que la forme et les autres caractères du produit changent, la probabilité que ces modifications ne dépendent pas de l'influence du principe variable, devient extrême. Toutefois le meilleur moyen d'obtenir sur ce sujet des données certaines, et d'apprécier en même temps la possibilité qu'une aggrégation pareille fût déterminée seulement par agglutination sans combinaison réelle, c'était de faire directement des expériences sur des cristallisations de sels mélangés en proportions connues, afin de déterminer jusqu'à quel point une petite quantité d'un même principe, combiné ou non, mais présent dans la cristallisation, peut influer sur la forme et les caractères physiques. Déja l'on avait quelques observations de ce genre dues au laborieux et infortuné Leblanc. M. Beudant les reprit, avec des vues plus générales, en étendit le plan, et en fit le sujet d'un mémoire qu'il présenta l'année dernière à l'Académie. Cet habile minéralogiste, en opérant sur des dissolutions mélangées de sulfate de fer et de sulfate de cuivre, ou de sulfate de zinc, ou de ces trois sels ensemble, a réussi à en tirer des cristaux qui lui ont paru conserver la forme rhomboïdale du sulfate de fer, quoiqu'ils ne continssent de ce sel que des proportions variables et fort petites, par exemple, moins de trois centièmes, dans le cas du mélange

des trois dissolutions. Il a en outre remarqué que de légers changemens de proportion, que l'on aurait été porté à supposer d'une très-faible importance, suffisaient, dans certains cas, pour donner tout-à-coup la prépondérance à tel ou tel de ces trois sels, de manière à imprimer sa forme aux cristaux composés. Ces résultats offraient une induction puissante pour admettre dans l'arragonite l'existence d'une influence analogue exercée sur les molécules de chaux carbonatée, par les petites quantités de carbonate de strontiane en proportion variable que l'on y avait observées. Mais l'application de cette analogie exigeait que la strontiane carbonatée eût pour forme primitive celle même de l'arragonite; car, dans toutes les expériences de M. Beudant, la substance déterminante avait toujours donné aux cristaux sa propre forme et non une forme étrangère. Or la découverte de la strontiane carbonatée cristallisée, faite peu de temps après, n'offrit point ce caractère d'identité; M. Haüy s'est assuré que la forme génératrice de cette substance est irréductible à celle de l'arragonite, quoiqu'il existe entre elles un rapport de ressemblance assez spécieux pour avoir séduit d'autres observateurs. D'après cette remarque, l'influence qu'on avait été porté à lui supposer sur la forme de l'arragonite n'est plus admissible; les recherches mêmes des chimistes qui ont réussi à en rendre les dernières traces sensibles, confirment de nouveau, de la manière la plus forte, l'identité de composition de l'arragonite et de la chaux carbonatée; et l'existence de cette identité avec la différence du système cristallin, ne pouvant plus être attribuée avec vraisemblance anx incertitudes de la chimie, devient un fait de première importance pour cette science et pour la minéralogie cristallographique.

En analysant les sels mélangés obtenus dans ses expériences, M. Beudant les a trouvés composés de proportions variables sous une forme extérieure constante, même dans les cas où leur transparence s'opposait à ce qu'on put les considérer seulement comme les résultats d'une grossière et irrégulière aggrégation. En effet, la transparence est un puissant indice pour faire supposer une union intime entre les substances dont un produit se compose, sur-tout quand elle existe entre des élémens dont les pouvoirs de réfraction diffèrent autant que ceux du sulfate de fer et du sulfate de cuivre, comme M. Wollaston l'a judicieusement remarqué. D'après ce caractère, M. Beudant n'a pas dû considérer ses produits cristallisés comme étant de simples mélanges. Mais, d'un autre côté, il aurait été contraire aux principes universellement reçus dans la minéralogie de les regarder comme autant de combinaisons distinctes; car, en général, lorsqu'un élément se trouve dans un minéral en proportion variable sans que le système cristallin change, comme cela arrive souvent dans les substances terreuses, on est dans l'usage de supposer que cet élément n'est pas essentiel à la constitution et à la cristallisation du minéral, qu'il y est ce que l'on nomme accidentel; et, conformément à ce principe, on n'a point égard à sa présence dans la classification du produit comme cristal. Pour se soustraire à cette alternative, M. Beudant a proposé d'appeller ses cristaux composés, des *mélanges chimiques*, indiquant par cette expression, une sorte d'état intermédiaire entre celui de mélange mécanique et celui d'intime combinaison.

Sans méconnaître les grands caractères de spécialité que certaines limites définies de proportion impriment générale-

ment aux combinaisons chimiques, sans vouloir sur-tout infirmer en rien l'usage ingénieux que M. Haüy a fait de cette considération pour discerner les véritables rapports des substances minérales, et pour démêler les effets simples des forces régulières au milieu de la complication qu'y mêlent souvent des circonstances évidemment fortuites, ne pourrait-on pas, en principe, douter que la doctrine des combinaisons définies, si généralement réalisée dans nos laboratoires, doive être strictement appliquée aux produits naturels? Car d'abord, dans nos expériences même, nous voyons certaines substances se combiner évidemment les unes avec les autres dans des proportions qui semblent n'avoir rien de fixe. Par exemple, lorsque les métaux s'allient entre eux de tant de manières différentes, et forment des corps si disincts les uns des autres par leur dureté, leur élasticité, leur couleur et tous leurs autres caractères, dira-t-on que ces parties ne sont pas combinées? le fer ne fait-il que se mêler avec le charbon, lorsqu'il forme avec lui des aciers doués de propriétés si différentes selon les quantités des deux principes qui les composent? On connaît un grand nombre de liquides qui, lorsqu'on les mélange, forment d'abord une liqueur opaque ou imparfaitement transparente, dans laquelle les filets encore isolés des deux substances exercent des réfractions inégales qui rendent les images des objets confuses et mal terminées lorsqu'on les regarde par transmission; mais, peu-à-peu, la liqueur s'éclaircit, l'indétermination des images diminue, enfin disparaît, et alors la vision s'opère aussi nettement qu'à travers les liquides reconnus pour les plus homogènes. Peut-on dire que, dans cet état progressif, si différent de lui-même aux diverses

époques, et dans lequel fort souvent une grande quantité de chaleur s'absorbe ou se dégage, il n'y a jamais eu que diffusion et mélange sans combinaison? Et, dans les produits nombreux formés par des alcalis et des terres, ne trouve-t-on pas encore tous les caractères de la combinaison avec des proportions indéfiniment variables? Tous ces verres dont les élémens généraux sont les mêmes, quoiqu'en proportion diverse, tous ces verres si transparens, si limpides, où la réfraction de la lumière est si régulière quoique si différente de l'un à l'autre, ne sont-ils donc que des mélanges d'oxide de plomb, d'alcalis, et de sable, sans combinaison? Il semble bien difficile de leur refuser ce dernier caractère. Et, s'il en est ainsi, quelle impossibilité, quelle difficulté peut-il y avoir à ce que ces combinaisons ou d'autres analogues cristallisent, je ne dis pas seulement dans un état de fusion libre, mais à l'aide de circonstances particulières, telles que la pression ou les autres agens mécaniques qui peuvent maîtriser le mode de leur union? N'avons-nous pas vu la craie transformée en marbre dans les expériences de sir James Hall, ce qu'elle n'aurait jamais fait sans les influences simultanées de la forte pression et de la haute température auxquelles elle s'est trouvée exposée dans l'appareil dont ce savant a fait usage? Ne faut-il pas, d'après cet exemple, regarder comme possible, dans les circonstances où s'est trouvé le globe, beaucoup de modes de combinaisons que nous ne savons pas encore opérer? Et, dans le cas où des cristaux naturels, de forme semblable, renferment un ou plusieurs élémens en proportion variable, doit-on toujours, d'après cela seul, regarder ces élémens comme accidentels? Ne se pourrait-il pas que, forcés par des actions extérieures, ils fussent réellement en-

trés en combinaison avec les autres élémens, en se soumettant à leur mode de cristallisation? Cette question n'importe pas moins à la chimie qu'à la minéralogie elle-même.

Un savant, dont la finesse ne saurait laisser échapper une observation importante quand elle s'offre à ses regards, le docteur Wollaston, a remarqué le curieux exemple de cristaux artificiels ayant la forme extérieure du sulfate triple de nickel et de potasse, et dont l'intérieur contenait de petits octaèdres visibles de sulfate de nickel pur, agglutinés par les particules du sulfate triple qui donnait sa forme propre à toute la masse. Cette observation tendrait à faire concevoir que des substances, dont la composition individuelle est assujétie à des proportions définies, peuvent, sans perdre cette composition et le système cristallin qui leur est propre, s'unir en toutes proportions entre elles; et tel pourrait bien être l'état des sels composés que M. Beudant a obtenus dans ses expériences, comme ce savant l'a lui-même conjecturé (1). Alors la variabilité des proportions dans ces sels tiendrait à la faiblesse de l'affinité que les principes immédiats de la combinaison exercent les uns sur les autres; ce qui paraît être en effet la condition générale des combinaisons indéfinies qui s'observent dans les expériences chimiques. Mais, jusqu'à quel degré la combinaison peut-elle être intime dans un pareil système? Les particules des deux principes immédiats ne sauraient-elles s'y trouver qu'à l'état de simple mélange; ou leurs attractions mutuelles pourront-elles aller

---

(1) *Voyez*, sur la possibilité de ce mode de combinaison, une note très-remarquable de M. Gay-Lussac, dans les Annales de chimie et de physique pour juin 1816, pag. 177.

jusqu'à leur imprimer des lois régulières d'arrangement? En un mot, des systêmes ainsi constitués en proportion variable, pourront-ils avoir, non-seulement une forme extérieure régulière, mais un système cristallin intérieur, sinon dans une formation libre, du moins sous l'influence de forces étrangères qui les maîtrisent momentanément? Nous voici revenus à l'importante question sur laquelle aucune théorie chimique ou minéralogique ne peut offrir d'autorité décisive, et qui, touchant aux limites du possible, ne doit être résolue que par l'observation même des produits existans dans la nature.

Dans cet état de choses, le point douteux, celui où vont se rendre toutes les difficultés, c'est évidemment de savoir quand il y a combinaison et quand il y a mélange. La chimie ne peut donner à cet égard que des inductions, tirées des caractères habituels qu'elle observe dans les cas où la combinaison n'est pas douteuse. La minéralogie ne peut également offrir que des présomptions, fondées sur les changemens que le systême cristallin éprouve dans un grand nombre de cas où la diversité des principes réellement combinés est certaine. Mais, ni l'une ni l'autre, ne paraissent avoir jusqu'à présent de caractère absolu pour décider si, dans tel cas nouveau, il y a combinaison ou mélange. « Je ne sache pas, dit M. Haüy, dans son tableau comparatif, que jusqu'ici on ait établi une règle pour déterminer la limite à laquelle finissent les quantités accidentelles et commencent celles qui sont essentielles. » L'objet du mémoire que je présente à l'Académie est d'indiquer un pareil caractère, applicable dans un grand nombre de circonstances; de donner les règles qu'il faut suivre pour en faire usage; enfin d'en présenter des ap-

plications. Ce caractère consiste dans les phénomènes réguliers de polarisations que les rayons lumineux subissent en traversant les corps cristallisés.

Pour sentir en quoi ces phénomènes, lorsqu'ils sont observables, sont particulièrement propres à résoudre la question proposée, il suffit de considérer les circonstances essentielles à leur existence, et de remarquer la condition capitale qui distingue leurs indications de celles que peut donner la réfraction simple. Dans cette dernière, les déviations et les dispersions qu'éprouvent les rayons lumineux sont les résultats de toutes les actions exercées sur eux par les particules qui composent la masse solide ou fluide que la lumière traverse, indépendamment des positions relatives de ces particules, et en les considérant comme de simples points, disséminés uniformément dans chaque élément infiniment petit de la masse. Aussi ces effets restent-ils les mêmes dans toutes les situations que les particules peuvent prendre les unes à l'égard des autres, pourvu que leurs actions individuelles et leurs distances mutuelles restent constantes. C'est ainsi, par exemple, que la réfraction et la dispersion, produites par une masse fluide de forme déterminée, ne changent pas quand on l'agite. Les phénomènes de la double réfraction au contraire, et ceux de la polarisation qui émanent d'axes rectilignes, exigent, outre la transparence, un mode d'aggrégation régulier, uniforme, et si je l'ose dire, une homogénéité de structure qui se continue à travers des épaisseurs sensibles de la substance observée, et se montre la même dans tous les élémens sensibles de sa masse. Cette condition leur est tellement nécessaire, que les mêmes substances qui les produisent le plus énergiquement à l'état solide, le sucre et le soufre,

par exemple, perdent cette propriété lorsqu'elles sont fondues ou dissoutes dans l'eau; ce qui permet à leurs particules de se mettre dans toutes sortes de positions indéterminées les unes à l'égard des autres; et elles la reprennent de nouveau lorsque, par un refroidissement graduel ou par une évaporation lente, on leur permet de revenir à un état régulier d'aggrégation. Mais, si le retour à l'état solide est trop brusque pour que cette régularité se rétablise, alors ni la double réfraction ni la polarisation émanée d'axes rectilignes ne reparaissent avec la solidité. Ainsi ces phénomènes, lorsqu'ils se manifestent dans les corps solides avec les caractères de continuité qui leur sont propres, attestent l'existence d'un mode d'arrangement pareillement continu et fixe; en un mot ils décèlent un système cristallin intérieur; ils peuvent, en conséquence, servir pour constater cet état des corps, même lorsque la régularité des formes qui les limitent n'est point actuellement observable, ou lorsqu'on doute si les causes qui l'ont produite ont exercé une influence intime et déterminante sur l'arrangement intérieur des molécules matérielles dont la masse est composée.

On pressent déja les conséquences que peut donner un tel indice de la cristallisation intérieure dans les corps solides; mais, avant de les développer, il faut achever de désigner les traits auxquels on pourra le reconnaître, et fixer invariablement les caractères par lesquels il doit se manifester. Je les limite aux phénomènes de polarisation régulièrement émanés d'axes rectilignes, c'est-à-dire dont la succession, soumise aux lois que j'ai généralement reconnues dans les corps solides dont la cristallisation n'est pas douteuse, varie, d'après ces lois, avec la quantité de matière cristallisée que le rayon

traverse, et avec l'angle qu'il forme dans sa route avec une ou plusieurs lignes droites menées dans la substance du cristal suivant des directions fixes, déterminées relativement aux pans de ses molécules, indépendamment des surfaces naturelles ou artificielles par lesquelles il est limité. Cette restriction est indispensable. Car on sait que la seule incidence de la lumière sur des lames transparentes, même non cristallisées, et sa seule réfraction dans leur substance, produisent aussi des phénomènes de polarisation propre, tant sur la lumière directe que sur la lumière polarisée; et il se produit des effets analogues dans les minéraux dont les couches ne sont pas réunies les unes aux autres par une aggrégation parfaite. Mais ces phénomènes, dans leurs effets immédiats et dans les variations qu'ils éprouvent sous des incidences diverses, suivent d'autres lois que ceux qui émanent d'un axe de cristallisation, et peuvent en être distingués par ces différences. En outre, comme ils proviennent de la superposition mécanique des couches cristallisées, on peut les affaiblir de plus en plus en diminuant le nombre de ces couches, c'est-à-dire en amincissant la lame cristallisée à travers laquelle on observe; ce qui, par le fait, et par la définition même d'un état cristallin, ne change rien aux forces qui dépendent réellement de la cristallisation continue, ni aux lois des phénomènes que ces forces produisent. C'est ainsi que les lames de mica très-épaisses, et dont les feuillets ne sont pas intimement unis dans toute leur épaisseur, produisent à-la-fois sur la lumière polarisée, les effets propres au mica comme cristal, et ceux que produit une pile de lames de verre à faces parallèles. Mais ce dernier effet disparaît dans les lames plus minces, où les couches superposées

sont plus intimement unies. De même, les aiguilles de tourmaline, lorsqu'elles sont taillées en plaques parallèlement à la direction de leur longueur, qui est aussi celle de leur axe de double réfraction, polarisent perpendiculairement à cet axe, lorsqu'elles sont suffisamment épaisses, toute la lumière qui les a traversées. Mais cet effet de la superposition de leurs couches ne s'observe complètement que dans celles dont la limpidité est imparfaite. Il s'affaiblit à mesure qu'on les amincit, et, en diminuant suffisamment l'épaisseur, il finit par devenir insensible. Alors on n'observe plus que les effets ordinaires d'un cristal à un seul axe, parfaitement régulier. On les observerait de même, sans aucune intervention étrangère, dans une lame mince de tourmaline taillée perpendiculairement à cet axe. Ainsi on peut dire, en principe, que, pour observer avec netteté les caractères optiques des cristaux, il faut les réduire en lames minces, où la régularité de la cristallisation se fasse sentir tout entière; de même que, pour obtenir avec le plus de précision les angles dièdres de leurs faces, il faut les mesurer sur de très-petits fragmens, afin que le peu de distance des élémens dont on compare les faces assure la continuité et l'uniformité de leur aggrégation. Ceci donne un nouveau motif pour apprécier la découverte que M. Arago a le premier faite des couleurs que les cristaux développent dans la lumière polarisée quands ils sont suffisamment amincis. Ces couleurs, étant toujours identiques avec celles des anneaux colorés, et se succédant toujours par des lois fixes dans l'ordre de ces anneaux, à mesure que le rayon réfracté traverse une plus grande épaisseur du cristal qui les produit, ou forme de plus grands angles avec son axe de double réfraction, comme je l'ai prouvé de-

puis long-temps par un grand nombre d'expériences, leur succession offre l'indice le plus apparent et le plus sensible pour découvrir l'existence de ces axes et pour déterminer leur position dans les substances cristallisées. Les caractères tirés de ce genre d'observation sont tellement précis, qu'il suffit d'avoir une seule lame cristallisée, à faces planes, transparente et bien homogène, pour pouvoir assigner, d'après elle seule, si le cristal dont elle fait partie a la double réfraction, quelle est la nature attractive ou répulsive de celle qu'il exerce, quelle est son intensité; enfin quels sont les axes rectilignes dont elle émane, et comment ils sont placés dans sa substance.

On voit qu'ici je considère la polarisation émanée d'axes rectilignes comme un indice de la double réfraction. C'est qu'en effet ce genre de phénomènes accompagne toujours la double réfraction dans les exemples où celle-ci est observable; mais, quoique la coëxistence de ces deux phénomènes soit jusqu'ici un fait d'observation général, il n'est pas du tout nécessaire de l'admettre pour les conséquences que je me propose de tirer de l'existence des axes de polarisation; car, voulant seulement les faire servir à constater l'existence d'un mode d'aggrégation intérieur, régulier, continu, et identique avec lui-même dans tous les points de la substance observée, il me suffit que les phénomènes de polarisation rapportés à ces axes soient pareillement réguliers, qu'ils soient continus dans toute la masse de la substance observée, et les mêmes parallèlement aux mêmes directions dans quelque point de cette masse qu'on les étudie. Quelle que puisse être d'ailleurs leur nature intime et leur cause, s'ils ont ces caractères, ils attesteront évidemment l'existence d'un

système d'élémens matériels arrangés d'une manière symétrique et continue dans sa symétrie, ce qui est l'unique circonstance que je veuille tirer de leur observation. (1)

Pour éclaircir ces principes par un exemple qui en rendra l'application palpable, supposons que l'on nous présente une de ces plaques de verre qui, par une haute caléfaction suivie d'un refroidissement rapide, ont acquis la propriété d'agir sur les faisceaux de lumière polarisée qui les traversent, et d'enlever à la polarisation primitive certaines teintes, lesquelles, lorsqu'on les sépare des autres par une réflexion qui s'applique à elles seules, font paraître toute la plaque décorée des plus vives couleurs. Voilà des phénomènes de polarisation sans doute; mais ils n'émanent point d'axes rectilignes, et ils n'offrent nullement les conditions qui caractérisent les corps continuement et uniformément cristallisés. En effet la teinte enlevée à la polarisation primitive et la direction de la polarisation nouvelle varient d'un endroit à l'autre de la plaque. Le système d'aggrégation intérieur, en vertu duquel les élémens matériels produisent ces phénomènes, est donc dissemblable en différens points. Voici déja un caractère qui exclut toute ressemblance avec un cristal; mais suivons les preuves de cette dissemblance. Si la plaque observée est de forme ronde, elle vous présentera une série d'anneaux colorés circulaires, partagés en quatre secteurs égaux par une croix noire dont les branches se coupent à son centre. C'est à-peu-près l'apparence qu'offre

(1) Depuis la lecture de ce Mémoire, j'ai reconnu, par des expériences, que les axes de polarisation multiples, sont aussi des axes de double réfraction.

aussi une plaque de spath d'Islande taillée perpendiculairement à son axe de cristallisation, lorsqu'on l'observe de la même manière; mais voici des différences capitales, et qui tiennent au mode de l'aggrégation même. Dans la plaque de spath d'Islande vous observerez ces anneaux par-tout ou vous ferez passer le cône des rayons visuels : le centre des anneaux sera toujours au point où la plaque est traversée par un rayon parallèle à son axe de cristallisation : ce sera toujours de ce point que partiront les quatre branches de la croix noire; au centre de la plaque, comme tout près de ses bords, vous observerez les mêmes apparences, et elles se produiront également quelle que soit la forme de la plaque, qu'elle soit ronde, ou carrée, ou triangulaire. Ils ne changeront pas davantage de nature si vous l'amincissez; seulement les anneaux s'élargiront, parce que, à incidence égale, les rayons lumineux parcourront une moindre épaisseur de matière cristallisée. Tous ces résultats conviennent parfaitement à un système cristallisé, d'une structure continue et uniforme; mais, essayez dans la plaque de verre les mêmes épreuves. D'abord les anneaux colorés qu'elle fait paraître ne s'éloignent pas de leur centre, suivant les lois de distance qui conviennent à un cristal; et, en second lieu, ce centre est invariablement fixé au centre de la plaque. Il ne suit point votre œil quand vous regardez successivement à travers des parties diverses de la substance vitreuse; chacune de ces parties a ses teintes propres qui lui sont comme attachées. Le système d'aggrégation qui les produit, quel qu'il puisse être, est donc variable d'un point à un autre; et, puisqu'il est régulier dans son ensemble, et en rapport avec la forme extérieure de la plaque, il faut qu'il résulte

d'une dépendance mutuelle de positions entre tous les élémens matériels du système. Aussi trouvez-vous que toutes les apparences changent, si vous changez les rapports de position de ces élémens, comme vous pouvez le faire en usant la plaque et l'amincissant, ou en général lui donnant une autre figure. Enfin elles cessent tout-à-fait si vous supprimez les liens invisibles que l'élasticité de la substance a établies entre ses diverses particules, lorsque, par un refroidissement subit, on les a contraintes à prendre dans l'intérieur de la masse un arrangement dépendant de la forme et de l'état de la surface extérieure qui la terminait. Cette comparaison, dont je pourrais pousser beaucoup plus loin les détails, montre une différence totale entre l'état général d'une pareille plaque, et l'aggrégation intérieure d'un système cristallin continu, et identique avec lui-même dans toutes ses parties. Or le même mode de raisonnement peut également s'appliquer à tous les phénomènes de polarisation imaginables; et, lorsque la transparence des substances permettra d'en faire usage, il donnera toujours les moyens de décider si l'état cristallin existe; car, bien que nous nous soyons guidés sur l'exemple des lois physiques que les phénomènes de ce genre suivent dans les corps cristallisés doués de la double réfraction, cependant on peut voir que le mode même de raisonnement repose sur des principes abstraits beaucoup plus généraux que ces phénomènes, puisqu'ils sont seulement l'expression des caractères de continuité et d'homogénéité de structure, qui constituent l'état dont on veut reconnaître l'existence.

Ayant ainsi établi des règles fixes pour reconnaître la structure cristalline dans les substances transparentes, même

quand leur forme extérieure n'est point observable, ou quand on ne croit pas pouvoir en conclure l'existence d'un état cristallin intérieur, il nous reste à énoncer les indications que la connaissance d'un pareil état pourra donner concernant les relations chimiques des élémens qui le composent, et je résumerai dans les propositions suivantes, celles d'entre ces indications qui me semblent assez évidentes pour ne pouvoir pas être contestées légitimement.

« Lorsque les phénomènes de polarisation habituels d'un minéral ne se trouveront changés ni dans leur intensité, ni dans leur nature, par la présence d'une autre substance dans sa masse, on en devra conclure que les particules de cette substance y sont distribuées confusément, qu'elles n'altèrent point le système cristallin propre au minéral, et qu'ainsi il est au moins très-vraisemblable qu'elles ne sont qu'interposées dans ses joints naturels, sans déterminer par ce mélange une espèce distincte. »

« Si, au contraire, la présence de la nouvelle substance change la nature ou l'intensité des phénomènes de polarisation que le minéral exerçait; si, ainsi changés, ces phénomènes émanent encore d'axes rectilignes, et décèlent ainsi un système d'aggrégation régulier, continu et uniforme dans toute la masse du composé, on en devra conclure que, dans toute cette masse, les particules de la nouvelle substance et celles du minéral sont groupées symétriquement et régulièrement, de manière qu'elles se regardent les unes les autres dans chaque groupe par des faces pareilles; et que tous les groupes se suivent et adhèrent les uns aux autres par des côtés homologues. Une pareille relation, continuée à travers des épaisseurs sensibles, suppose des forces régulières qui la

déterminent, et qui émanent des particules même ; il y aura donc alors combinaison réelle des principes primitifs du minéral avec la nouvelle substance. »

D'après les mêmes considérations, lorsque l'on rencontrera deux composés dont les actions sur la lumière polarisée étant régulières, et émanant d'axes rectilignes, différeront dans leur intensité ou dans leur nature, on en devra conclure que ces composés diffèrent, soit dans leur composition chimique, ou dans leur mode d'aggrégation, ou dans ces deux qualités à-la-fois. »

Je suis loin de présenter les conditions précédentes comme les seules qui puissent caractériser l'état de combinaison, ni même comme l'accompagnant toujours. Je crois, au contraire, avec la plupart des chimistes, que l'homogénéité de composition, jointe à la transparence, sont des indices suffisans de cet état; mais, lorsqu'on peut y ajouter encore des phénomènes de lumière qui dénotent un mode régulier et uniforme d'aggrégation, il me semble que l'existence de la combinaison est portée ainsi jusqu'à l'évidence.

J'aurais extrêmement souhaité d'appliquer cette méthode aux cristaux composés de M. Beudant; mais, jusqu'ici, je n'en ai pas eu à ma disposition d'échantillons assez limpides pour pouvoir les faire servir à des expériences rigoureuses. J'ai donc cherché, dans les produits naturels, quelqu'autre sujet d'épreuve plus accessible, et j'en ai trouvé un très-étendu dans l'espèce minéralogique, connu sous le nom de *mica*.

Les minéralogistes rassemblent dans l'espèce du mica un grand nombre de produits naturels, provenant de gisemens très-divers, dont le caractère commun le plus apparent, est d'être ordinairement composés de feuillets élastiques, aisé-

ment séparables les uns des autres, et qui se laissant déchirer plutôt que rompre peuvent, en raison de cette ténacité même, être amenés souvent à un extrême degré de ténuité. Toutefois ce caractère, comme tous ceux qui ne tiennent point à l'aggrégation élémentaire des particules, mais à la simple superposition de couches d'une épaisseur déja sensible, est sujet à varier; et dans la riche collection de M. de Bournon, qui forme aujourd'hui le cabinet particulier du roi, on voit des cristaux de mica, à la vérité fort petits, dont les couches sont unies si intimement, que la division en devient très-difficile, ce qui donne à ces cristaux une transparence égale à celle du rubis ou du saphir le plus pur, aussi-bien dans le sens des lames que perpendiculairement à leur plan. Seulement, les couleurs transmises suivant ces deux directions sont presque toujours différentes, comme M. de Bournon l'a remarqué. Quant à la forme, ce caractère si important pour la distinction des espèces minérales, elle est ici très-embarrassante à fixer. La plupart des variétés ne se trouvent qu'en feuillets où l'on peut seulement reconnaître une disposition bien marquée à se laisser déchirer suivant des lignes droites qui font entre elles des angles de 120 et de 60 degrés, quoique beaucoup d'autres sens de rupture soient aussi praticables, et que même, dans certaines variétés, ces derniers joints deviennent plus sensibles que les autres. Ces caractères conviennent presque également à des bases rhombes, hexagones ou rectangulaires. Mais la détermination du solide générateur qu'il faut élever sur ces bases exige la considération des cristaux complets. Or, on en trouve très-peu de tels. Cependant il en existe qui sont des cylindres droits à base hexagone ou rhomboïdale; d'autres sont obliques sur

ces bases; d'autres enfin, en très-petit nombre, présentent une seule espèce de faces additionnelles inclinées aux pans du prisme, lesquelles fournissent l'unique indication que l'on ait pour fixer la hauteur relative du solide générateur, en combinant leur inclinaison avec une loi hypothétique de décroissement. D'après ces données, les seules que fournisse jusqu'à-présent la nature, M. Haüy a indiqué, pour la forme primitive du mica, un prisme droit à base rhombe, dont la hauteur est, à la longueur des côtés de la base, à-peu-près comme 3 à 8. Cette détermination, selon ce qu'il a bien voulu me dire lui-même, a été calculée sur des cristaux venant du Vésuve. M. le comte de Bournon suppose que le prisme primitif du mica doit être oblique sur ses bases. Alors les faces latérales obliques, que M. Haüy regarde comme secondaires, deviendraient primitives dans ce nouvel arrangement; et, par réciprocité, les faces droites, qu'il suppose primitives, seraient secondaires. Je ne me hasarderai point à prendre parti entre ces deux célèbres minéralogistes. J'ai seulement essayé de vérifier les angles des bases et ceux des faces et que M. le comte de Bournon a bien voulu me confier. J'ai sur plusieurs cristaux des plus parfaits que l'on connaisse, déterminé ces angles avec le goniomètre réflecteur de M. Wollaston; je les ai trouvés sensiblement d'accord avec les valeurs que M. Haüy leur a données; mais le peu d'éclat des faces m'ayant forcé de les couvrir avec des lames minces de chaux sulfatée, pour leur faire réfléchir des images nettes, et leur peu d'étendue laissant toujours quelque doute sur l'exactitude de l'apposition de ces miroirs auxiliaires, je ne puis regarder ces résultats que comme des approximations dans lesquelles de petites différences auraient dû probable-

ment m'échapper. J'ai également essayé de dessiner ces cristaux au mégascope, en agrandissant les dimensions de leurs images. J'ai particulièrement appliqué ce procédé à un échantillon venant du Vésuve et remarquable par les inflexions multipliées de son contour, qui le font ressembler à une fortification polygonale; je n'ai rien trouvé dans ces inflexions qui ne pût se déduire de la base rhombe indiquée par M. Haüy; mais de très-petites différences, comme celles que l'on pourrait sur-tout soupçonner entre des substances presque semblables, ne se laisseraient pas apercevoir par cette méthode purement graphique. Je doute que l'on puisse obtenir plus d'exactitude avec le goniomètre de M. Haüy, surtout à cause de l'extrême petitesse des faces sur lesquelles il faut appuyer les branches de cet instrument. Au reste, ces données, telles qu'elles sont, proviennent toutes des cristaux du Vésuve, ou des variétés analogues pour la structure. On est moins éclairé encore sur la cristallisation complète des autres variétés qui, sous le nom générique de mica, ont été réunies à la précédente : car je ne sache pas qu'on en ait décrit d'échantillon terminé par des faces latérales suffisamment nettes pour que leur obliquité pût être observée avec exactitude. Tout ce que l'on sait, à cet égard, se réduit donc à la connaissance des directions rhomboïdales ou hexagonales, suivant lesquelles leurs feuillets se laissent déchirer; et cette connaissance suffit bien pour indiquer la base du solide générateur, mais non sa hauteur ni l'inclinaison de ses pans.

On voit, par cet exposé, que le groupe de minéraux désigné aujourd'hui par le nom de mica, n'est pas établi sur une identité constatée de formes cristallines, mais seulement

sur des analogies tirées de l'état feuilleté des substances qui le composent, et de la disposition de leurs lames à se laisser déchirer suivant des directions parallèles aux côtés d'un hexagone régulier. Cette absence des caractères les plus décisifs donne évidemment peu de certitude à la réunion de tant de minéraux en une seule espèce. L'analyse chimique loin de diminuer ces doutes les augmente encore par la diversité des proportions, et même des substances qu'elle découvre dans les individus tirés de gisemens divers; et, quoiqu'il faille sans doute accorder quelque chose aux erreurs des opérations; quoique la variété des proportions qu'elles indiquent entre les mêmes élémens puisse faire douter de l'intimité de leur combinaison, dans le système des proportions rigoureusement définies, d'une autre part la transparence parfaite de ces différens produits, leur homogénéité, la constance de composition que chacun d'eux présente dans les diverses analyses faites par des observateurs exacts, annoncent avec une forte vraisemblance qu'ils constituent des combinaisons réelles, essentiellement distinctes. Dans cette alternative, les caractères optiques deviennent d'un très-important usage, puisque, pénétrant dans l'intérieur même des composés diaphanes, et indiquant la diversité ou la ressemblance de leur structure intime, ils suppléent à la connaissance de la forme qu'il ne nous est pas permis d'observer. Si donc il arrive que leurs indications s'accordent avec celles de l'analyse chimique pour montrer une différence de structure dans les produits dont la composition est différente, il semble qu'il ne pourra plus rester aucun doute légitime sur la nécessité de les distinguer comme espèces, puisqu'alors ces produits ne se ressembleront ni dans la nature de leurs principes ni dans leur état d'aggrégation.

Conduit par ces considérations j'ai cherché à étudier les caractères optiques de toutes les variétés de mica jusqu'à-présent connues. Sans doute il eût été impossible que je me les procurasse par moi-même, mais de vrais amis des sciences ont bien voulu favoriser mon travail avec une générosité qui m'impose la plus entière reconnaissance. MM. Lelièvre, Brochant, Brongniart, ont mis à ma disposition tous les cristaux de mica qu'ils possédaient. M. Tonnelier, conservateur du cabinet des mines, m'a permis d'étudier tous les morceaux cristallisés de cette collection, et d'en tirer les lames nécessaires pour mes expériences. J'ai reçu aussi d'un habile minéralogiste, M. Léeman, deux cristaux de mica de Sibérie, qui lui ont semblé uniques, et qui en effet présentent des modifications extrêmement remarquables. Mais nulle part je n'ai trouvé de plus utiles secours, ni de plus faciles, que dans le cabinetparticulier du Roi. Cette magnifique collection que M. le comte de Bournon a formée, et qu'il ne cesse d'enrichir par ses propres recherches et par les voyages qu'il fait entreprendre, a été ouverte à mes observations avec une complaisance sans bornes. Les morceaux les plus précieux, lorsqu'ils pouvaient devenir le sujet d'une expérience utile, m'ont été confiés pour en faire l'étude, à la seule condition de ne pas les altérer; et, lorsque quelque particularité de leur constitution m'a fait desirer de pouvoir en analyser la structure, il s'est toujours trouvé, dans la multitude des morceaux secondaires que cette riche collection possède, quelque échantillon, d'un prix infini pour mes recherches, qui a pu m'être abandonné. En favorisant ainsi, par tous les moyens imaginables, un travail entrepris dans l'espoir d'être utile à la science, M. de

Bournon s'est plu à me répéter que tel était l'usage, vraiment royal, auquel le possesseur éclairé de ce trésor de minéralogie voulait sur-tout qu'il fût destiné.

Avec ces secours, la détermination des caractères optiques devenait facile; mais, pour compléter et assurer leurs indications, il fallait les combiner avec celles de la chimie. Or les analyses déja faites des diverses variétés de mica ne pouvaient pas servir à ce but, puisqu'on ne savait jamais avec certitude à quels caractères optiques il fallait les rapporter; et ainsi l'on ignorait si les différences qu'elles présentent, et qui ont fait quelquefois révoquer en doute leur exactitude, tenaient aux erreurs de la chimie ou à une différence réelle de composition et de structure. Le seul parti à prendre était donc de recommencer ces analyses sur les échantillons mêmes dont les caractères optiques étaient observés. M. Vauquelin a bien voulu se charger de ce travail difficile, de sorte que, grâce à la complaisance de cet illustre chimiste, il ne nous manque aucune des données qui peuvent éclairer la question.

En soumettant d'abord aux épreuves optiques toutes les variétés de mica transparent que j'ai pu me procurer, et qui sont au nombre de plus de trente, j'ai d'abord trouvé entre elles cette grande division qui, depuis long-temps, s'était présentée à moi; savoir que, dans les unes, la force polarisante émane d'une seule ligne droite normale aux lames, tandis que les autres manifestent deux systèmes de forces pareilles, émanant de deux lignes rectangulaires, dont l'une est normale à la surface des lames, et l'autre est située dans leur plan. J'avais signalé cette diversité dès mes premières recherches, par les dénominations de mica à un axe et à

deux axes; mais alors je n'avais eu l'occasion de l'observer que sur deux variétés, dont l'une, celle à deux axes, était le mica de Moscovie en grandes feuilles, et l'autre, à un seul axe, était un mica jaunâtre, dont la surface un peu onctueuse, et comme adoucie plutôt que polie, se distinguait du premier par une réflexion spéculaire beaucoup moins nette. Ce mica, qui me vient de M. Léeman, n'avait encore été ni analysé, ni distingué des autres micas dans les collections minéralogiques. Depuis, j'ai trouvé que la même différence dans les caractères optiques s'étend à beaucoup d'autres variétés de micas, et les partage ainsi en deux classes. Il est d'ailleurs impossible de la méconnaître au plus léger examen, tant les phénomènes qui la manifestent sont sensibles. Les micas à un seul axe normal ne produisent aucun changement dans la polarisation des rayons lumineux qui les traversent perpendiculairement aux surfaces de leurs lames, parce qu'alors ces rayons se trouvant dirigés suivant l'axe même, la force polarisante qui émane de l'axe n'a point d'effet sur eux. Les micas à deux axes, au contraire, modifient la polarisation des rayons, même sous cette incidence, non pas en vertu de leur axe normal, dont l'action propre est alors nulle, mais en vertu de l'axe situé dans le plan de leurs lames, dont l'énergie est alors à son maximum, parce qu'il se trouve perpendiculaire aux rayons transmis. Les conséquences de cette disposition diverse se font pareillement sentir sous les incidences obliques. Les micas à un seul axe, qui d'abord n'exerçaient aucune action polarisante, sous l'incidence perpendiculaire, commencent à en développer une lorsqu'on les incline, parce qu'alors leur axe n'est plus parallèle aux rayons réfractés. Par l'accroissement pro-

gressif de cette action, ils enlèvent d'abord à la polarisation primitive le bleu blanchâtre du premier ordre, puis le blanc, le jaune pâle, l'orangé, le rouge sombre, et ainsi successivement toutes les teintes des anneaux réfléchis, marquées dans la table de Newton. L'existence unique de leur axe, et sa direction perpendiculaire à leurs lames, fait qu'ils produisent les mêmes couleurs sous les mêmes obliquités, dans quelque sens qu'on les incline ; et, si on les arrête à une inclinaison fixe, on ne change rien aux couleurs qu'ils produisent en les tournant dans tous les sens sur leur propre plan. Pour les micas à deux axes, au contraire, le sens de l'inclinaison est loin d'être indifférent : lorsqu'elle s'opère de manière que l'axe situé dans le plan des lames se trouve dans le plan d'incidence, l'action de cet axe s'ajoute à celle que l'axe normal développe, parce que, dans tous les micas à deux axes que j'ai observés, ces deux actions semblent de même nature et toutes deux répulsives (1). Par conséquent, les teintes enlevées par le système à la polarisation primitive, baissent continuellement dans l'ordre des anneaux, en partant de celle que présentait l'incidence perpendiculaire, précisément comme si la lame devenait graduellement plus épaisse en

(1) Je les juge telles d'après les phénomènes de polarisation, n'ayant pas eu de cristaux assez épais pour observer les déviations des rayons. Mais la coëxistence des deux forces polarisantes, empêchant de les étudier isolément, rend la détermination de leur nature moins certaine que dans les cristaux à un seul axe. La double réfraction de la topaze, qui a aussi deux axes, avec une séparation de rayons sensible, étant comparée au principe de la moindre action, décidera si de pareils systèmes peuvent admettre des forces de même nature, ou s'il faut qu'elles y soient de nature opposée.

s'inclinant. Mais, pour intervertir cette marche, il suffit de tourner les lames d'un angle droit sur leur plan ; ce qui rend l'axe qu'elles contiennent perpendiculaire au plan d'incidence dans lequel l'axe normal reste toujours. Alors les effets de ces deux axes se retranchent l'un de l'autre; et, en conséquence, les teintes enlevées à la polarisation primitive, commencent par monter dans l'ordre des anneaux, comme si la lame observée devenait plus mince ou son action plus faible. On arrive ainsi à une inclinaison sous laquelle les deux axes se compensent : alors le système a perdu son pouvoir comme cristal ; il n'agit pas plus sur la lumière polarisée que ne ferait une lame d'eau. Mais, si l'on dépasse cette incidence, l'action toujours croissante de l'axe normal l'emporte sur celle de l'autre axe, et les teintes enlevées à la polarisation primitive recommencent à baisser dans l'ordre des anneaux , en suivant toujours fidèlement la table de Newton. Cette opposition s'opère également, et par des périodes exactement pareilles, dans les deux sens diamétralement opposés, suivant lesquels l'axe normal peut s'incliner autour du rayon polarisé, lorsque son plan d'inclinaison est fixé par rapport à l'autre axe, conformément aux conditions précédentes ; et la même symétrie s'observe aussi dans le cas où les forces des deux axes concourent; ce qui prouve que l'axe que nous avons désigné comme étant normal aux lames, leur est normal en effet, tandis que l'autre est compris dans leur plan.

La seule description de ces phénomènes montre combien ils sont différents de ceux que produisent les micas à un seul axe, et prouve qu'il est impossible de les confondre. On peut même, pour en rendre la distinction plus sensible,

émbrasser toutes leurs variations d'un seul coup-d'œil, en plaçant les lames de mica entre deux plaques de tourmaline taillées parallèlement à l'axe, et dont les directions homologues soient croisées à angles droits : car, chacune de ces deux plaques polarisant perpendiculairement à son axe tous les rayons qui la traversent, il s'ensuit que le système des deux ensemble est opaque dans tout l'espace où elles se croisent; mais il redevient transparent si l'on interpose entre les deux plaques une lame cristallisée qui change en partie la direction de polarisation du faisceau lumineux qui a traversé la première plaque. D'après ces propriétés, que j'ai depuis long-temps fait connaître, un pareil système produit le même effet que l'appareil de Malus, composé d'un verre réflecteur, et d'un prisme à double réfraction destiné à analyser la polarisation de la lumière réfléchie. Mais il a de plus cette propriété, que, si vous placez l'œil très-près de la seconde plaque de tourmaline, et que vous receviez ainsi par transmission la lumière des nuées, vous voyez en même temps, et par des rayons perpendiculaires aux plaques, et par des rayons obliques, dans toute l'étendue du champ que peut embrasser votre œil. Vous devez donc apercevoir à-la-fois toutes les variétés de teintes que la lame de mica ou de tout autre cristal, interposée entre les deux plaques, peut produire sous toutes ses incidences diverses; et la série des inclinaisons, où les teintes sont les mêmes dans divers azimuths, doit former des lignes courbes, colorées de chacune de ces teintes. C'est précisément ce que l'expérience confirme. Seulement, comme on devait s'y attendre, la forme des courbes d'égale teinte est différente, selon la nature et le mode de polarisation qu'exerce la lame interposée. Pour

les micas à un axe, par exemple, ces courbes sont des anneaux circulaires, concentriques à la normale, et dans lesquels on voit se succéder, à partir du centre, toutes les couleurs désignées dans la table de Newton. Ce centre lui-même, ainsi que tout le système des anneaux, est partagé en quatre secteurs égaux, par les quatre branches d'une croix noire, lesquelles s'entrecoupent sur la normale même. Cette disposition est absolument la même que l'on observe dans d'autres cristaux à un seul axe, par exemple, dans le spath d'Islande et le béryl; et elle est tellement une conséquence d'un seul système de forces polarisantes, que j'ai montré dans mon traité de physique, comment on peut, d'après l'épaisseur de la plaque et l'énergie de la double réfraction qu'elle exerce, calculer la grandeur absolue que les anneaux doivent avoir à une distance donnée de l'œil, et les résultats ainsi obtenus s'accordent parfaitement avec les mesures directes. On conçoit aisément qu'un système qui possède deux genres de forces polarisantes doit présenter des dispositions différentes dans ses courbes d'égales teintes. Aussi, lorsque l'on interpose une lame de mica à deux axes entre les deux tourmalines, on ne voit plus une seule série d'anneaux circulaires concentriques à la normale, et traversés à leur centre par une croix noire; ce centre est alors occupé par des couleurs d'un certain ordre dépendantes de l'épaisseur de la lame, et qui proviennent du croisement de deux systèmes d'anneaux dont les centres sont placés hors de la normale à des distances égales, dans les directions mêmes, et sous les inclinaisons précises où les deux axes se compensent dans les premières observations; et il y a deux pareils systèmes à égales distances de la normale, parce que la perpendicularité

de l'axe normal sur le plan des lames fait qu'il peut compenser l'autre axe, sous des inclinaisons égales, dans deux directions opposées l'une à l'autre diamétralement. Dans tous les micas à deux axes que j'ai observés, les anneaux paraissent circulaires ou légèrement elliptiques; mais ils sont traversés à leur centre par une simple ligne noire, au lieu de la croix noire par laquelle les anneaux des cristaux à un axe sont traversés. Dans certaines variétés de mica, l'angle de compensation est trop grand pour que les deux systêmes d'anneaux puissent être embrassés en entier dans le champ de l'œil. Alors il faut les faire venir successivement dans l'espace que ce champ embrasse, en inclinant la lame de mica elle-même sur les rayons polarisés. C'est ainsi que le docteur Wollaston me les a fait voir d'abord, dans l'espèce de mica vulgairement appelé verre de Moscovie, dont il exposait les lames à un large faisceau de lumière polarisée, rendant sensibles à-la-fois, par cette belle expérience, tous les effets des deux systêmes de forces polarisantes dont j'avais reconnu l'existence antérieurement. Mais depuis, j'ai trouvé d'autres espèees de mica à deux axes, où la compensation s'opère sous un angle beaucoup moindre; de sorte qu'en plaçant leurs lames entre deux tourmalines, on peut voir les deux systêmes d'anneaux d'un seul coup-d'œil. Tel est, par exemple, le mica qui vient de Zinnwald, en Bohême, où il se trouve mêlé de cristaux d'étain. Au reste, les micas ne sont pas les seules substances où l'on trouve deux axes de polarisation disposés de cette manière; la topaze est dans ce cas, ainsi que me l'a fait voir le docteur Wollaston; et on aurait pu le conclure des systêmes d'anneaux colorés que présentent les lames parallèles à la base

de sa forme primitive, lesquels ont été découverts et décrits par M. Brewster.

Ayant ainsi défini généralement les deux classes de phénomènes optiques produits par les diverses variétés de micas, selon que leurs forces polarisantes émanent d'un ou de deux axes, il faut en examiner les détails dans chacune d'elles et voir s'ils offrent réellement les conditions qui caractérisent un système cristallin intérieur, telles que nous les avons établies dans la première partie de ce mémoire. Or, toutes les variétés que j'ai étudiées, présentent ces conditions avec une parfaite évidence. Leurs lames deviennent pour la lumière de vrais cristaux, où l'on retrouve l'homogénéité de composition, la transparence, et dans lesquels l'homogénéité de structure est attestée, par la régularité et l'identité des phénomènes qui se produisent en chacun de leurs points. Dans les micas à un seul axe les effets sont absolument pareils à ceux qu'offre le spath d'Islande sauf l'intensité qui est moindre à-peu-près dans le rapport de 1 à 5 pour les micas du Vésuve. Quant aux micas à deux axes, leurs effets sont tout semblables à ceux que produisent des lames de topaze blanche, sauf la nature de l'action qui, dans ces micas, est répulsive au lieu que dans la topaze elle est attractive. Du reste, les indications d'un système cristallin régulier sont de part et d'autre les mêmes, et, par conséquent, aussi décisives. Néanmoins, comme les propriétés des systèmes doubles de forces polarisantes ont été jusqu'ici moins étudiées que celles des systèmes simples, j'en signalerai particulièrement deux qui s'observent dans tous les micas à deux axes, et qui montrent combien le double système de forces qu'ils possèdent est intimement lié à leur structure. La première c'est que, pour toutes

ces substances, l'axe situé dans le plan des lames, affecte une direction fixe, indépendante de leur configuration, et de l'incidence sous laquelle on les place. Cette direction est la même pour tous les points de chaque lame, et la même encore pour toutes les lames dans lesquelles chacune peut être subdivisée. Elle est donc nécessairement relative aux pans des particules ou des groupes de particules qui composent la substance du minéral; et en effet, toutes les fois que j'ai pu mettre en évidence les divisions naturelles des bases, ce qui dans le plus grand nombre de variétés est facile, l'axe de polarisation contenu dans leur plan s'est trouvé parallèle à la petite diagonale des rhombes, ou, pour s'exprimer indépendamment de toute supposition particulière, à un des côtés des sections hexagonales, tellement que j'ai fini par employer la détermination optique de l'axe pour trouver directement, et d'une manière sûre, le sens de ces sections. La seconde propriété que je ferai remarquer consiste en ce que la direction de l'axe normal et son énergie, sont également constantes pour tous les groupes de particules intégrantes : car, dans chaque variété de mica, l'inclinaison qu'il faut donner à l'axe normal pour qu'il compense l'autre axe, est la même pour toutes les lames minces ou épaisses, du moins quand l'union de leurs feuillets est assez intime pour ne pas faire naître entre eux des réflexions trop multipliées qui altéreraient l'effet propre au mica lui-même, en le compliquant avec des phénomènes accidentels de polarisation par réfraction. Or, cette constance des actions polarisantes, ce parallélisme de leur direction dans tous les points d'une substance, cette uniformité de leur énergie dans toutes les parties de dimensions sensibles qu'on en peut extraire, que prouvent-elles

sinon un mode d'aggrégation également constant, identique et uniforme; en un mot, un état cristallin dans le sens le plus général de cette expression?

Les diverses substances dont les forces polarisantes émanent d'un seul axe, comme le spath d'Islande, le beryl, le cristal de roche, peuvent différer entre elles de deux manières, par l'intensité de ces forces, et par leur nature, selon qu'elles appartiennent à la double réfraction attractive ou à la double réfraction répulsive. J'ai, en effet, montré depuis long-temps l'existence de cette opposition, analogue à celle des deux électricités ou des deux magnétismes, et qui consiste en ce que certains cristaux rapprochent le rayon extraordinaire de leur axe, au lieu que les autres l'en éloignent. S'il existe différentes sortes de micas à un seul axe, l'on devra sans doute y trouver des différences dans l'un ou l'autre de ces caractères. Malheureusement, je n'ai pu jusqu'ici obtenir un grand nombre de variétés de ce genre en lames, qui eussent à-la-fois assez d'égalité et d'étendue pour pouvoir comparer les intensités de leurs effets, sous des poids égaux de leur substance; j'ai toutefois obtenu entre quelques-unes des différences incontestables, dont je joindrai l'indication à leur description particulière. Mais il en est une qui se sépare de toutes les autres par la nature de sa force polarisante, laquelle est attractive, au lieu que celle de toutes les autres espèces à un ou à deux axes sont répulsives sans aucune exception. Cette particularité s'observe dans une variété prismatique à base rhombe, que M. de Bournon m'a donnée sous le nom de mica de la vallée d'Alla, en Piémont. La plupart des minéralogistes classent cette variété parmi les talcs, à cause de son aspect onctueux. Mais la famille des talcs elle-

même est très-peu connue, et son type général, le talc laminaire, exerce la polarisation répulsive. Malheureusement, ces cristaux de la vallée d'Alla sont si petits, qu'il paraît bien difficile de déterminer rigoureusement les angles de leur forme, comme aussi d'en réunir assez pour les soumettre à l'analyse chimique; mais, d'après l'opposition bien certaine que la nature de leur action leur donne avec toutes les autres substances appelées micas ou talcs, il faut nécessairement qu'ils diffèrent de ces substances dans la nature de leurs principes, ou dans leur mode d'aggrégation, ou dans ces deux élémens à-la-fois.

Quant aux micas à deux axes, tous ceux que j'ai observés ont des forces de polarisation répulsives; mais ils offrent des différences dans les intensités absolues de ces forces, et sur-tout dans le rapport d'énergie de leurs axes, circonstance qui se manifeste avec la plus grande évidence dans la grandeur de l'angle sous lequel il faut incliner les lames, pour que les actions émanées des deux axes se compensent exactement. Cet angle, dans ses variations, m'a offert trois limites de valeurs assez tranchées; savoir, 34°, 30°, et 25°. La première limite convient au mica foliacé de Moscovie, et à un très-grand nombre de variétés, dont je pourrai désigner quelques-unes à la fin de ce Mémoire, d'après leur aspect et leur gisement. La compensation sous l'angle de 25 degrés ne s'est offerte à moi que dans le mica argentin de Zinnwald, en Bohême. On ne peut pas supposer que cette grande différence de compensation soit due seulement à une différence de force réfringente, qui, pour des incidences extérieures diverses, amènerait le rayon réfracté à la même inclinaison intérieure autour de l'axe normal d'où les forces polarisantes émanent:

car cet angle intérieur étant d'environ 22° pour le mica de Moscovie, on voit qu'il faudrait, pour l'égaliser dans les deux substances, que le mica de Zinnwald n'exerçât presque pas plus de réfraction que l'air, ce qui est inadmissible; d'ailleurs, en observant les couleurs que réfléchit ce mica sous des incidences diverses, lorsqu'il est réduit en lames excessivement minces, je me suis assuré qu'elles parcourent exactement, ou à très-peu de chose près, dans la table de Newton, la même étendue que celles que réfléchissent les lames de mica de Moscovie, d'où il suit que les rapports de réfraction doivent être aussi presque égaux dans ces deux substances. Enfin la comparaison même des actions exercées par le mica de Zinnwald avec celles du mica de Moscovie, à poids égal sur une même étendue de surface, m'a fait connaître une grande inégalité dans leurs énergies absolues. Celle de l'axe normal, dans le mica de Zinnwald, est, à très-peu de chose près, les $\frac{2}{5}$ de son analogue dans le mica de Moscovie; et celle de l'axe situé dans le plan des lames, est seulement $\frac{1}{5}$ de sa correspondante. Ces déterminations sont assez difficiles à obtenir, parce qu'elles exigent que les lames comparées soient bien planes et bien régulières, ce qui se rencontre rarement dans le mica de Zinnwald. Mais elles confirment pleinement les caractères de dissemblance déja indiqués par la différence de rapport des axes.

Il me reste à parler de la limite de compensation intermédiaire qui s'opère sous l'incidence d'environ 30°. Tient-elle à une différence essentielle d'aggrégation, ou seulement à une inégalité dans la force réfringente ordinaire, laquelle pourrait être produite par des substances même non cristallisées, c'est ce qu'il serait difficile de décider par ce seul

mode d'expérience; mais, dans tous les cas, l'une ou l'autre de ces différences existe nécessairement dans les variétés de micas qui présentent cet angle particulier de compensation : car, quoiqu'il s'écarte peu des autres limites, on ne saurait le méconnaître. Je l'ai même aperçu, par un accident singulier de cristallisation, dans une petite zone hexagonale d'un cristal de mica à deux axes, dont la compensation générale est d'environ 35 degrés. Les lames de ce cristal, regardées à la simple vue, n'offrent pas la moindre différence d'aspect dans leurs diverses parties. On n'y aperçoit ni changement de transparence, ni stries, ni ondulations. Mais l'action sur la lumière polarisée y dévoile bien vite des dissemblances auparavant invisibles. Le petit hexagone se montre sous toutes les incidences avec une couleur différente des parties qui l'environnent, et il arrive plus tôt qu'elles à la compensation de ses axes; alors son image extraordinaire paraît comme un petite tache noire au milieu du reste de la lame; et, réciproquement, il a déja passé au blanc du premier ordre quand le reste de la lame devient noir. Ces apparences ne viennent pas de ce que cette petite partie du cristal tournerait ses axes de cristallisation autrement que le reste, comme il arrive dans beaucoup d'autres circonstances. Ici ces axes sont par-tout exactement parallèles; car toute la surface entière de la lame revient à la polarisation primitive dans une position commune. Il ne faut pas non plus supposer que quelque substance grossièrement interposée entre les joints naturels du cristal, dans cette partie, soit la cause de ces changemens d'apparence; car d'abord cet endroit est, comme tout le reste, d'une transparence parfaite; ensuite une telle interposition, si elle avait lieu sans combinaison intime, ne produirait rien

de semblable, d'après les lois mêmes de la double réfraction; et j'en puis donner pour preuve accessoire une lame de mica de Moscovie, que je tiens de la complaisance de M. Pelletier, et dans laquelle des ondes d'oxide de fer visibles se sont insinuées entre les joints naturels, au point d'en marquer parfaitement le contour hexagonal. Ici il n'y a évidemment qu'interposition, sans cristallisation commune; aussi la compensation des deux axes se fait-elle, dans ces parties-là, exactement sous le même angle que dans les autres; et quand la lame arrive à l'incidence d'environ 34 degrés où ce phénomène doit s'y opérer, son image extraordinaire devient nulle dans toute son étendue. Enfin on ne peut pas non plus supposer que la différence de compensation, dans le petit hexagone, dont je viens de parler, résulte d'une inégalité d'épaisseur qu'aurait la lame en ce point, comme si une petite pellicule de sa surface y avait été enlevée; car une telle diminution d'épaisseur ne changerait point l'angle de compensation des axes, puisque cet angle est constant dans toutes les lames de même nature, minces ou épaisses. Mais il y a plus, ce petit hexagone porte en lui-même un indice qui montre que l'inégalité de sa compensation ne tient pas simplement à une différence dans son pouvoir de réfraction ordinaire, et qu'elle résulte réellement d'un autre rapport entre les énergies de ses deux axes de polarisation. Et cet indice est que, sous l'incidence perpendiculaire où l'action de l'axe normal est nulle pour toute l'étendue de la lame, sans en excepter le petit hexagone, la couleur de celui-ci, comparée à celle du reste de la lame, décèle une infériorité d'énergie dans l'axe situé dans son plan. Car la teinte qu'il enlève à la polarisation primitive est alors le blanc du

premier ordre, ayant pour complément le bleu sombre, et dont l'indication numérique est 3, 4 dans la table de Newton, tandis que, dans le reste de la lame, cette teinte est l'orangé, du même ordre, dont la valeur est 5, 2. Maintenant si l'on tourne la lame de manière qu'en l'inclinant, l'action développée de son axe normal s'ajoute à celle de l'axe situé dans son plan, cette différence primitive de 5, 2—3, 4 ou 1, 8 persiste sous toutes les inclinaisons, comme le prouvent les couleurs enlevées à la polarisation primitive; d'où l'on voit que l'axe normal a la même énergie dans le petit hexagone que dans le reste de la lame, et que l'action seule de l'axe plan qui lui est conjugé est trop faible. D'après cela que doit-il arriver, si, au lieu de tourner la lame de manière que les actions de ces deux axes conspirent, on la place de manière qu'elles s'opposent l'une à l'autre, ce qui s'opère en faisant décrire à la lame un quart de révolution sur son plan? Il devra arriver que l'axe normal, en s'inclinant, aura plutôt réduit l'effet de l'axe plan dans le petit hexagone que dans le reste de la lame, et ainsi la compensation devra s'y faire sous une obliquité moins considérable. C'est, en effet, ce que montre l'expérience, comme je l'ai annoncé d'abord; et l'on peut même, d'après la seule connaissance de l'angle de compensation qui a lieu en cette partie, calculer la différence des teintes pour une incidence quelconque, en supposant la même énergie de l'axe normal, et le même rapport de réfraction ordinaire. Toutefois ce calcul, comparé à l'expérience, semble aussi indiquer que le rapport de réfraction est un peu plus faible dans le petit hexagone. De tout cela, il faut conclure qu'il existe probablement en cet endroit-là une différence dans la composition de la lame; mais si cette diffé-

rence est réelle, le principe qui l'a produite est nécessairement entré en combinaison avec ses autres élémens chimiques, puisqu'il a modifié l'énergie de son action sur la lumière polarisée. Il est très-possible qu'il se soit fait ici une véritable introduction du petit cristal hexagonal au milieu de l'autre, comme on voit des aiguilles de Titane et des plaques de fer olygiste suspendues dans des masses de quartz limpide qui les enveloppent de toutes parts. Et cette idée semble pleinement confirmée par deux circonstances, dont l'une est la limitation régulière du petit hexagone, et l'autre son existence continue dans tous les feuillets que l'on peut extraire de la lame où il est enchâssé : car on l'y retrouve toujours avec sa même étendue et sa même énergie de polarisation, modifiée seulement, comme elle doit l'être, par le changement d'épaisseur.

D'après cela, on peut présumer que lorsqu'on analysera les variétés de mica à deux axes dont l'angle de compensation est aussi de 30°, comme pour notre petit hexagone, on trouvera qu'elles diffèrent en quelque chose de celles des variétés qui se compensent sous l'angle d'environ 34; et alors les principes qui, par leur nature ou par leurs proportions, constitueront la différence, seront combinés dans les deux cas. Je suis loin de vouloir inférer qu'il faille pour cela faire de ces variétés deux espèces minéralogiques distinctes; mon but n'est nullement de traiter cette question, ni même d'y toucher en aucune manière. Les seules conséquences que je cherche à établir sont tout entières de fait, et portent sur l'existence ou la non-existence de l'état de combinaison; nous verrons plus loin si l'analyse chimique confirme ou infirme ces conséquences.

La délicatesse de l'indice qui se tire de l'angle de compensation, dans les micas à deux axes, me faisait vivement desirer de l'appliquer à la substance désignée sous le nom de lépidolithe, laquelle est classée entre les micas par beaucoup de minéralogistes, tandis que d'autres persistent à l'en séparer; j'ai en conséquence cherché à me procurer des lames limpides de lépidolithe. Mais des minéralogistes très-habiles m'ont remis, sous cette dénomination commune, des substances qui différaient. L'une d'elles était un minéral feuilleté, couleur de rose, venant des Etats-Unis d'Amérique, et dont les lames, exposées à la flamme d'une bougie, offraient quelques particularités analogues à celles que l'on attribue à la lépidolithe. Ce minéral s'est trouvé avoir deux axes de polarisation répulsifs et dont la compensation se fait sous un angle d'environ 37°. Ces caractères sont presque exactement les mêmes que présente le mica de Sibérie; seulement l'angle de compensation est de 2 ou 3 degrés plus fort. On peut donc présumer qu'il y aura peu de différence de composition entre ces deux minéraux. Mais M. de Bournon et M. Lelièvre m'ont remis, sous le nom de lépidolithe, une substance douée de propriétés fort éloignées de la précédente. A la vérité, elle cristallise aussi en tables rhomboïdales, et elle a aussi deux axes répulsifs; mais le rapport de leur énergie est tel, qu'ils se compensent sous l'angle de 27 ou 28°; et les lames minces que l'on en retire étant exposées un instant à la flamme d'une bougie, s'y fondent aussi aisément qu'une feuille de verre. J'ai observé ces caractères sur deux petites lames cristallisées en rhombes, que j'avais reçues de M. de Bournon. Les morceaux beaucoup plus grands que m'a remis M. Lelièvre, n'étaient pas

régulièrement cristallisés; du moins ils n'offraieut pas la constance de caractères optiques qui caractérisent une structure interieurement régulière; ce qui me semble pouvoir être attribué au voisinage de la macle dans laquelle ils étaient engagés. Du reste, leurs caractères chimiques étaient les mêmes que dans la lépidolithe de M. de Bournon, et bien différens de ceux de tous les autres micas. Sans doute, l'analyse chimique trouvera, comme l'analyse optique, une différence notable de constitution entre des substances de propriétes si dissemblables; et, en voyant que l'une et l'autre ont été quelquefois présentées sous des dénominations pareilles, on comprend comment les minéralogistes ne se sont pas accordés sur la place qu'ils devaient leur attribuer.

Dans les épreuves auxquelles j'ai ainsi soumis les diverses variétés de substances comprises sous le nom de micas, on a pu voir qu'en employant la polarisation de la lumière pour indiquer l'état de cristallisation, j'ai eu soin de n'en tirer que des caractères de fait, qui fussent seulement propres à prouver l'uniformité, la régularité et l'homogénéité de la structure, indépendamment d'aucune supposition particulière; mais une fois cet état prouvé et notre but atteint, il n'est pas inutile de chercher toutes les conséquences probables que peut donner la connaissance des forces polarisantes que ces substances possèdent. Or, dans toutes les expériences que l'on a jusqu'à-présent faites sur les corps cristallisés doués de la double réfraction, on a constamment trouvé qu'ils exercent aussi des forces polarisantes propres, émanées des mêmes axes; que ces forces développent les teintes des anneaux dans les faisceaux de lumière polarisée; et que leur énergie, mesurée par ce phénomène

croît, comme la double réfraction, avec l'angle que l'axe du cristal forme avec le rayon réfracté. J'ai même fait voir, depuis long-temps, qu'il existe une dépendance constante, quant à l'intensité et à la nature, entre la force de double réfraction d'un minéral et la force de polarisation propre qu'il exerce; de manière que, par l'observation de cette dernière seule, on peut prévoir si la double réfraction est attractive ou répulsive, et quelle sera son énergie. Cette relation, établie jusqu'ici par tous les cristaux sur lesquels la double réfraction a pu être observée, rend bien vraisemblable que les variétés de mica, soit à un axe ou à deux axes, dont il émane des forces polarisantes, sont aussi douées de la double réfraction. C'est ce que j'ai eu l'avantage de vérifier sur des cristaux de mica du Vésuve, appartenant au cabinet particulier du roi, et sur des échantillons non moins précieux de mica de Sibérie que je dois à l'obligeance de M. Leman. On ne pouvait pas, au premier aspect, y reconnaître cette propriété, parce que leurs faces obliques n'ont pas le poli spéculaire, et ainsi ne sont pas transparentes; mais je les ai rendues telles en y collant de petites lames de verre très-minces au moyen d'une goutte d'huile de térébenthine; et alors, non-seulement j'ai pu y vérifier l'existence de la double réfraction, mais j'ai pu en mesurer l'intensité et reconnaître sa nature. Or ces deux circonstances se sont trouvées parfaitement d'accord avec ce qu'indiquaient les expériences de polarisation : car la double réfraction s'est trouvée répulsive, et son intensité un peu plus que triple de celle du cristal de roche, du moins pour le mica du Vésuve, comme on aurait pu le conclure du rapport des forces polarisantes. Je donnerai en détail, à la fin de ce mémoire, les résultats exacts de ces me-

sures pour les variétés que j'ai observées : ici je me borne au résultat général.

Enfin j'ai appliqué les mêmes épreuves optiques au talc, qui, par sa constitution lamelleuse et par sa tendance à se subdiviser en rhombes, offre une si grande analogie avec les micas. La variété de talc appelée laminaire, ou communément talc de Venise, est la seule dont les lames m'aient offert assez de régularité pour pouvoir y observer des effets uniformes, et par conséquent des indices certains de sa structure. Mais ces indices le séparent entièrement de toutes les variétés de micas.

Ce talc, exposé aux rayons polarisés entre deux plaques de tourmaline croisées à angles droits, présente des anneaux circulaires, dont le centre est au point de la lame cristallisée, qui est vue par des rayons perpendiculaires. Déja ce caractère le distingue essentiellement de tous les micas à deux axes, où le centre des anneaux répond à des incidences obliques; mais il se distingue encore de tous les micas à un axe par un autre phénomène. Dans les micas à deux axes, les anneaux sont traversés diamétralement par une seule raie noire; dans les micas à un seul axe, ils le sont par une croix noire complète à branches rectangulaires; rien de cela n'a lieu dans le talc. La croix noire ne commence à se marquer qu'à une certaine distance du centre, ce qui indique deux systêmes de forces, l'un normal aux lames, l'autre dirigé d'une autre manière, et qui cesse d'être sensible comparativement au premier, lorsque l'action de celui-ci est suffisamment développée par l'inclinaison des rayons sur le plan des lames.

Les forces polarisantes qui dominent au centre de ces anneaux sont telles qu'en tournant la lame de talc sur son

propre plan, l'incidence restant toujours perpendiculaire, l'aspect de ce centre varie. Il y a deux positions dans lesquelles la croix noire se forme complètement avec ses deux branches exactement rectangulaires. Mais, quand on sort la lame d'une de ces positions, la croix se déforme, ses branches se séparent, se coupent et deviennent deux branches d'une même hyperbole; les sommets de ces branches s'écartent de plus en plus l'un de l'autre, jusqu'à ce que la lame ait été tournée de 45° ; alors, si l'on continue de la tourner, ces sommets se rapprochent graduellement par les mêmes périodes qu'ils avaient suivies dans leur écart; et enfin ils se rejoignent de nouveau quand la lame a tourné de 90°; alors les deux branches d'hyperbole redeviennent de nouveau deux lignes droites, la croix est complètement reformée, et toutes les apparences sont les mêmes que dans la première position de laquelle on était parti d'abord. Ces variations, produites sous une même incidence par le seul mouvement de rotation de la lame cristallisée, et lorsque l'action de l'axe normal est constante, montrent qu'il existe dans la lame de talc un système de forces qui agit suivant son plan, et qui émane d'une ligne qui y est située. En cela il diffère essentiellement des cristaux à un seul axe.

Ces deux systèmes de forces qui existent dans le talc présentent, sous les incidences obliques, des périodes de compensation analogues à celles que j'ai décrites dans les micas à deux axes, mais qui diffèrent beaucoup de celles-là par les valeurs des angles où elles s'opèrent. Si l'on détermine dans la lame de talc les deux sections rectangulaires dans lesquelles elle ne trouble point la polarisation des rayons qui la traversent, et qu'ensuite on l'incline successivement dans

ces sections-là, en menant le plan d'incidence à 45° de la polarisation primitive, on trouvera, comme pour les micas à deux axes, que dans l'une d'elles les actions de l'axe normal et de l'axe plan s'ajoutent, tandis que dans l'autre elles se retranchent l'une de l'autre. Entre ces deux positions rectangulaires, l'effet varie à mesure que l'on tourne la lame dans son plan. Des variations analogues s'observent aussi dans le mica à deux axes. Mais voici une différence capitale : dans le talc, la neutralisation complète des deux axes a lieu sous une incidence de 7 à 8 degrés comptés à partir de la normale; tandis que dans les micas, même dans celui de Zinwald où elle est la moins oblique, elle se fait encore sous un angle de 25°. Du reste, les deux forces de polarisation exercées par le talc sont aussi de même nature, et toutes deux répulsives comme celles des micas à axes; mais la différence des angles où la compensation s'opère montre que leurs rapports d'intensité sont bien différens. On doit donc en conclure que la composition ou la structure du talc diffère de celle de tous les micas, soit à un axe, soit à deux axes.

Pour exprimer et classer les apparences que les rayons polarisés manifestent dans les phénomènes quand ils traversent les corps cristallisés, j'ai employé des idées de forces qui agissent sur les particules lumineuses, considérées comme matérielles. Je desire qu'on ne voie dans ces termes qu'un simple mode d'énoncé des faits. Nous ignorons ce qu'est réellement la lumière en elle-même, si son principe est composé de particules matérielles, mues avec une grande vîtesse, ou si les impressions qu'elle produit résultent de vibrations transmises avec une excessive rapidité dans un milieu très-élastique; mais quel que soit celui de ces deux

modes que l'on adopte, si l'on n'en fait qu'un usage philosophique, les lois ainsi énoncées seront vraies en elles-mêmes et pour toujours, et leur emploi n'en sera pas moins utile et sûr dans les applications.

Comparaison des observations précédentes avec les résultats de l'analyse chimique.

Dans la première partie de ce mémoire, j'ai établi des caractères optiques, à l'aide desquels on peut reconnaître dans les substances transparentes l'existence d'un système cristallin intérieur. En appliquant ce genre d'épreuve aux diverses variétés de mica, elles nous ont, non-seulement indiqué dans ces minéraux des structures régulières, mais elles ont décelé entre eux des différences intimes, qui doivent nécessairement être produites par une dissimilitude dans la composition chimique, ou dans le mode d'aggrégation, ou dans ces deux qualités à-la-fois. Il devient donc maintenant nécessaire de consulter l'analyse chimique relativement à ces substances, afin que ses résultats combinés avec les indications de la lumière achevent de fixer les idées que nous devons nous en former.

Et d'abord, puisque nous avons trouvé entre les diverses variétés de micas cette grande division de structure, à deux axes et à un axe, commençons par essayer la comparaison sur deux variétés choisies dans chacune de ces deux classes, par exemple, sur le mica de Moscovie et sur le mica jaunâtre à réflexion spéculaire imparfaite, dont j'ai exposé depuis long-temps les caractères optiques. Le premier a été analysé par Klaproth; mais pour éviter toute méprise dans l'applica-

tion du résultat, cette analyse a été refaite de nouveau par M. Vauquelin sur des échantillons très-purs de mica de Moscovie, à deux axes répulsifs, dont l'angle de compensation, déterminé par expérience, était d'environ 35°. M. Vauquelin a aussi analysé le mica jaunâtre à un axe. Voici quels ont été les résultats de ces opérations.

Mica à deux axes. Compensat. 35°.		*Mica jaunâtre à un axe.*	
Silice	45	Silice	40
Alumine	33	Alumine	11
Potasse	15	Potasse	20
Magnésie	0	Magnésie	19
Fer oxidé	4	Fer oxidé	8
Chaux	une trace.	Chaux	une trace.
Eau	0	Eau	0
	97		98
Perte	3	Perte	2

Ici la chimie nous montre deux compositions bien différentes. Le mica à deux axes ne contient pas du tout de magnésie, le mica jaunâtre à un seul axe en contient un cinquième de son poids. Le premier renferme un tiers de son poids d'alumine; le second seulement un dixième. Aussi la manière dont ces deux minéraux se comportent dans les épreuves chimiques les plus simples est bien différente. Les lames de mica à un axe sont instantanément attaquées par l'acide sulfurique bouillant, qui les boursouffle en désunissant leurs feuillets où il ne laisse que la silice; au contraire, les lames de mica à deux axes, si minces qu'on les choisisse, se défendent contre les attaques de l'acide sulfurique avec une

énergie telle qu'on peut les y faire bouillir à plusieurs reprises jusqu'à évaporer complètement l'acide, sans qu'elles soient altérées sensiblement dans leur composition ou dans leur structure; car elles n'y perdent rien de leur poids, et leur action sur la lumière polarisée n'est point changée quand on les en retire. Ce n'est qu'en les réduisant en morceaux, d'une petitesse extrême, que l'on peut parvenir à agir sur elles par ce réactif si puissant; une si forte résistance suffirait seule pour attester l'existence d'un état de combinaison intime, quand même cet état ne serait pas déja prouvé par la structure cristalline que les effets du minéral sur la lumière mettent en évidence.

Ici je me trouve heureux de pouvoir rapporter textuellement une note que M. Vauquelin m'a remise sur ces analyses, et dans laquelle, après avoir fait ressortir quelques-unes des circonstances particulières qu'elles présentent, il explique la méthode générale qu'il emploie pour ce genre d'opérations.

« Jusqu'à-présent, dit M. Vauquelin, on n'avait rencontré la potasse que dans les pierres qui contiennent beaucoup d'alumine, et l'on trouvait en cela une conformité satisfaisante avec ce que l'art avait appris. L'on savait, en effet, que l'alumine exerce une grande action sur les alcalis, et que ceux-ci, quand ils ne font pas au moins la moitié de la combinaison, donnent naissance à des combinaisons insolubles.

« Il n'en est pas ainsi du mica jaunâtre à un seul axe : la potasse y est presque double de l'alumine, et serait capable, par cette proportion de rendre une partie de l'alumine soluble si elles étaient seules dans la pierre; mais il est probable qu'une certaine quantité de l'alcali est uni à la silice. Cependant lorsqu'on traite ce mica par les acides, il est en-

tièrement décomposé, et le silice qui reste, après la dissolution des autres principes, conserve dans ses paillettes la forme lamelleuse qu'avait le mica avant d'être soumis à l'analyse. Cela, il est vrai, n'est pas une raison pour croire que l'alcali n'est pas combiné à la silice. L'or ne conserve-t-il pas la forme qu'il avait dans son alliage après l'opération du départ? (Ajoutons qu'ici la transparence et l'homogénéité de structure, prouvée par les phénomènes optiques, achevent de donner toutes les preuves d'un état de combinaison.)

« Il résultera donc de ces analyses qu'il y a au moins deux sortes de micas pour la composition chimique. Il restera à déterminer, quand l'occasion le permettra, s'ils ont des formes cristallines différentes.

« Le mica et les autres pierres qui contiennent tout-à-la-fois de l'alumine, de la magnésie et de l'alcali, ne sont pas faciles à analyser, parce que l'alumine en se précipitant entraîne avec elle la magnésie, qui, quand elle est abondante, défend l'alumine contre l'action des alcalis. Le meilleur moyen que j'aie éprouvé pour séparer ces deux substances, c'est d'abord d'attaquer le minéral par l'acide sulfurique, d'évaporer la solution pour en chasser l'excès d'acide, de redissoudre les sels dans l'eau, et de précipiter par l'ammoniaque en excès, laver le précipité, et après l'avoir redissous dans l'acide sulfurique, précipiter l'alumine et le fer par le carbonate de potasse, filtrer et faire bouillir la liqueur pour en précipiter la magnésie que l'on fait rougir pour l'avoir pure. Pour avoir l'alumine, il faut faire bouillir, avec une solution de potasse caustique, le précipité formé par le carbonate de potasse, filtrer et précipiter la liqueur par le muriate d'ammoniaque.

« Quant à la potasse, on la trouve dans la liqueur d'où l'on a précipité l'alumine, la magnésie et le fer par l'ammoniaque. On la fait évaporer à siccité; on vaporise le sulfate d'ammoniaque à une chaleur suffisante, et l'on a pour résidu du sulfate de potasse, dont le poids indique celui de la potasse. Il faut enfin examiner si ce dernier sel ne contient pas du sulfate de magnésie, ce qui arrive quand la solution qu'on a précipitée par l'ammoniaque est par trop acide : quand il en contient, il faut précipiter la magnésie par la potasse caustique, la laver et la sécher. Sa quantité indique celle du sulfate de magnésie, qu'il faut soustraire de celle du sulfate de potasse. »

S'il était besoin d'ajouter quelque chose à la confiance que les opérations de M. Vauquelin inspirent à tout le monde savant, je me bornerais à dire que les analyses précédentes des deux variétés de micas à deux axes et à un axe ici désignées, ont l'une et l'autre été répétées deux fois, et la seconde sur deux échantillons différens, tirés de collections diverses, lesquels se sont trouvés composés des mêmes principes à de très-petites différences près.

En rapportant le détail des observations que j'ai faites sur des variétés diverses, j'ai dit que le mica rose des États-Unis, auquel on a quelquefois appliqué improprement le nom de lépidolithe, m'avait présenté absolument les mêmes caractères optiques que le mica de Moscovie, à cela près que ses deux axes se compensent sous une inclinaison plus forte d'environ deux ou trois degrés. Pour compléter la comparaison, j'ai remis une plaque très-pure de ce même

mica à M. Vauquelin, et en l'analysant il l'a trouvée composée ainsi qu'il suit:

Silice..................	48, 48
Alumine...............	33, 91
Potasse................	11, 30
Oxide de manganèse.....	1, 30
Eau....................	3, 26
	98, 25
Perte...........	1, 75

Les principes constituans sont donc les mêmes que dans le mica de Moscovie, à l'exception des quatre centièmes d'oxide de fer qui sont ici remplacés par 1,30 d'oxide de manganèse, auxquels notre second mica doit probablement sa couleur rose. La proportion des principes est aussi presque la même, seulement il y a dans le mica rose un tant soit peu moins de potasse qui se trouve remplacée par un peu plus d'eau, le premier mica n'en ayant pas donné à la calcination une quantité sensible. L'analyse de la mésotype a déja présenté aux chimistes l'exemple d'un remplacement pareil entre l'eau et l'alumine, comme M. Haüy l'a remarqué dans son tableau comparatif, page 194, où il ajoute qu'il ne sait pas s'il est facile de concilier ce principe d'échange avec les résultats géométriques qui ont donné pour la mésotype une forme primitive toujours la même, malgré cette variabilité de ses principes constituans. Cette obligation n'existe point relativement à nos micas, puisque les cristaux manquent pour déterminer leur forme; mais le fait en lui-même n'en est pas moins curieux et digne d'être remarqué; on voit aussi que cette diversité de composition, quoique si légère, n'a pas

échappé aux caractères optiques qui l'ont indiquée par une faible différence dans l'angle de compensation des deux axes.

Pour mettre en évidence toute la variété de ces combinaisons, j'ai prié M. Vauquelin d'analyser encore des échantillons de mica, en lames très-grandes et très-pures, qui m'ont été envoyés par M. Scroctschi, professeur de physique à l'université de Varsovie. Ce mica est à deux axes, et la compensation s'y opère sous un angle de 33 ou 34 degrés; mais, en l'exposant seulement à la flamme d'une bougie, ses lames s'exfolient et blanchissent comme celles du mica rose, et comme fait aussi la chaux sulfatée soumise à une pareille épreuve. Cette conformité me portait à penser qu'il pouvait renfermer aussi une quantité d'eau notable. C'est ce qu'a prouvé l'analyse; car M. Vauquelin a trouvé dans ce mica:

Silice...............	49,
Alumine............	26,
Potasse..............	11, 2
Oxide de fer.........	6, 8
Eau................	5,
Magnésie............	une trace.
	98,
Perte...........	2,

Les principes sont toujours les mêmes que dans les autres micas à deux axes, mais leurs proportions sont un peu différentes. Celles de la silice et de la potasse sont exactement les mêmes que dans le mica rose; mais il y a moins d'alumine, qui est suppléée par une certaine quantité d'eau et d'oxide de fer.

Puisque de très-légers changemens dans l'angle de compensation des deux axes correspondent ainsi à des variations de proportion sensible, il était naturel de s'attendre qu'une plus grande inégalité dans cet indice accompagnerait une compensation plus différente. Pour en avoir la preuve, j'ai remis à M. Vauquelin des morceaux de mica de Zinnwald, dont l'angle de compensation est de 25 degrés. Voici quels ont été les résultats de leur analyse :

Silice...............	46, 4
Alumine............	18, 6
Potasse..............	11, 2
Oxide de fer.........	20, 0
Oxide de manganèse...	2, 4
	98, 6
Perte...........	1, 4

Ici nous avons encore les mêmes principes que dans les autres micas à deux axes. Les proportions de silice et de potasse sont même peu différentes de celles que présente le dernier mica de Moscovie, dont nous venons de rapporter l'analyse; mais il y a encore moins d'alumine; il n'y a plus d'eau, et la diminution de ces principes est suppléée par une augmentation considérable d'oxide de fer. On pourrait difficilement supposer que cet oxide est étranger à nos lames, et seulement interposé entre les joints de leurs particules sans combinaison intime : car celles qui ont été soumises aux épreuves optiques étaient d'une transparence parfaite, et la lumière y indiquait une parfaite homogénéité de structure intérieure. Celles qui ont été analysées étaient tirées du même morceau, et semblaient ne différer des premières que

par une superposition moins égale ; mais tous les feuillets qu'on en pouvait extraire, s'ils avaient une transparence suffisante pour être observables, offraient toujours le même rapport de compensation. Enfin on pourrait encore ajouter que l'analyse de ce même mica, déja faite par M. Klaproth, présente des proportions exactement pareilles à celles que M. Vauquelin a trouvées, à l'exception de trois centièmes de potasse qui sont ici suppléés par une égale quantité d'oxide de fer et de manganèse. Mais on peut directement, par les plus simples épreuves, rendre sensible la grande quantité de fer que ce mica tient en combinaison même dans ses lames les plus transparentes. Il suffit pour cela de les faire rougir dans un creuset de platine; elles perdent aussitôt leur transparence, se colorent d'une forte teinte de rouille et prennent un éclat métallique si vif, qu'elles ressemblent presque à une lame de fer de l'île d'Elbe. Sans doute, si cette grande quantité de fer était auparavant invisible, c'est qu'elle était engagée par combinaison, et par une combinaison très-intime, avec les autres principes du minéral : aussi peut-on en avoir la preuve dans cet état même, en essayant d'agir sur les lames transparentes du mica de Zinnwald avec des aimans : car M. Gay Lussac a depuis long-temps montré que le fer devient graduellement moins sensible aux forces magnétiques, et finit par échapper à leur influence, quand il se combine avec d'autres substances, telles que le charbon, le phosphore, l'arsenic, et l'étain. On peut donc penser que s'il s'est combiné dans nos lames avec la silice, la potasse et l'alumine, le magnétisme n'aura que peu de pouvoir sur lui; tandis qu'il en aura beaucoup, lorsque le fer aura été rendu libre par la chaleur. C'est en effet ce que

l'expérience confirme. Pour m'en assurer, j'ai coupé de petites lames transparentes de mica de Zinnwald, en forme de parallélogrammes rectangles, de 15 millimètres de longueur; puis, les ayant rassemblées parallèlement, je les ai suspendues ensemble à un fil de cocon, long de 3 décimètres, au moyen d'un anneau de papier très-léger, et je les ai fait osciller entre les pôles opposés de deux faisceaux aimantés très-énergiques, dont les extrémités étaient eloignées l'une de l'autre de 60 millimètres. Elles se sont aussitôt dirigées dans le sens de ces pôles, comme aurait fait toute autre substance; et, en les faisant osciller, j'ai trouvé qu'elles faisaient trois oscillations en 80 secondes. Je les ai alors remplacées dans la même suspension par une aiguille de même longueur, faite avec un mélange de cire et de fer où il n'entrait que $\frac{1}{100}$ de ce métal; les oscillations de cette nouvelle aiguille ont été bien plus rapides, car elle en faisait 100 en 80″; or, puisque, dans les deux cas, les aiguilles étaient de même longueur, et que les particules de substances attirable étaient uniformément disséminées dans leur masse, il s'ensuit que les intensités des forces attractives sont entre elles comme les quarrés des nombres d'oscillations faites en temps égal, c'est-à-dire comme 9 à 10000, ou comme 1 à 1100, d'où l'on voit que si l'action magnétique, éprouvée par les aiguilles de mica de Zinnwald, devait être attribuée uniquement à la présence d'une certaine quantité de fer libre, cette quantité ne pourrait pas excéder le $\frac{1}{1100}$ de $\frac{1}{100}$, c'est-à-dire $\frac{1}{110000}$, ce qui est bien loin de $\frac{1}{5}$ que l'analyse chimique y démontre; mais une aiguille de cire qui aurait contenu un cinquième de son poids de fer libre n'aurait pas pu, à cause de l'énergie de son action, être tenue en oscillation entre les aimans à la distance

où les observations précédentes ont été faites, et elle se serait précipitée sur l'un des deux. Nous pouvons donc être assurés, par cette épreuve, que les lames transparentes de mica de Zinnwald contiennent le fer à l'état de combinaison, et même à l'état de combinaison très-intime, puisque, avec une proportion si considérable, les forces magnétiques ont si peu d'action sur lui. J'ai soumis à la même expérience des aiguilles faites avec le mica de Moscovie où M. Vauquelin a trouvé $\frac{7}{100}$ de fer, et elles ont fait 7 oscillations en 55″, lorsque celles du mica de Zinnwald en faisaient 12 dans le même temps; pour cette épreuve les aimans avaient été mis à la distance de 30 millimètres. Les intensités des forces attractives pour ces deux micas sont donc entre elles comme 49 à 144 ou comme 6,8 à 20, c'est-à-dire exactement dans la proportion des quantités de fer que l'analyse y a fait découvrir. On voit par cette expérience que le fer, même dans une intime combinaison, n'est pas absolument insensible aux attractions magnétiques, mais que le pouvoir de ces forces sur sa substance est seulement affaibli, à la vérité, dans une proportion si excessive, que la subtilité de la méthode seule des oscillations est encore capable de manifester sa présence. On conçoit que cet affaiblissement doit être plus ou moins considérable, selon que l'état de combinaison du fer est plus ou moins énergique; aussi, lorsque les aiguilles de mica de Zinnwald ont été chauffées jusqu'au rouge, afin de dégager le fer d'avec leurs autres principes, la vîtesse de leurs oscillations augmente dans une proportion énorme, quoique non pas encore, à beaucoup près, autant qu'elle le ferait si le fer était devenu tout-à-fait libre, au lieu de s'oxider fortement comme il le fait toujours dans cette opération.

Pour compléter ces comparaisons, j'ai encore prié M. Vauquelin de vouloir bien analyser un mica à deux axes dont l'angle de compensation était de 30 degrés. Ce mica, que l'on m'a donné comme venant du Mexique, était d'une couleur verdâtre et légèrement onctueux au toucher; l'analyse a été faite sur deux grammes de lames transparentes, d'une texture régulière, et des mêmes dont j'avais observé la compensation. Voici quels ont été les résultats:

Silice	54, 5
Alumine	22, 0
Potasse	10, 0
Oxide de fer	11, 5
Eau	0,
	98,
Perte	2,

Ici les principes constituans sont les mêmes que dans les autres micas à deux axes, mais les proportions sont bien différentes; il y a beaucoup moins d'alumine, seulement les $\frac{2}{3}$ de ce que contient le premier mica de Moscovie, analysé pag. 325; cette diminution est compensée par une plus grande quantité de silice et d'oxide de fer. Enfin, la proportion de potasse est à-peu-près la même que dans le mica rose des États-Unis, quoique cependant un peu moindre, moindre surtout qu'elle ne l'est dans le premier mica de Moscovie.

Parmi les micas à un axe, M. Vauquelin n'a encore analysé que le mica jaunâtre dont j'ai rapporté plus haut la composition; mais M. Klaproth a analysé le mica foliacé noir de Sibérie, que j'ai trouvé n'avoir aussi qu'un axe, d'une énergie un peu supérieure au précédent. Voici les résultats de cette analyse :

Silice	42, 0
Alumine	11, 5
Chaux	10,
Magnésie	9,
Potasse	0,
Oxide de fer	22,
	94, 5
Perte	5, 5

Ici les principes constituans sont les mêmes que dans le mica jaunâtre à un axe; car la perte de 5 ½ dans cette analyse peut appartenir à une petite quantité de potasse; mais les proportions de la plupart des principes sont bien différentes de ce qu'elles sont dans notre premier mica. Il y a beaucoup plus de chaux, d'oxide de fer, et beaucoup moins de magnésie; du reste les proportions de silice et d'alumine sont de part et d'autre les mêmes. La présence de la magnésie dans ce mica, lorsque l'on n'en trouve point dans le mica de Zinnwald, et dans celui de Moscovie, a porté M. Berzelius à émettre le soupçon que ce pouvait être un genre à part. (*Journal de physique*, mars 1818, pages 241 et 242.) Nous avons vu que le mica jaunâtre qui, ainsi que celui-ci, n'a qu'un axe, contient aussi de la magnésie et même en proportion beaucoup plus considérable, d'après l'analyse que M. Vauquelin en a faite. Serait-ce donc un caractère commun aux micas à un seul axe de contenir de la magnésie? C'est un soupçon qui mérite d'être apprécié par des analyses subséquentes. Le talc laminaire que ses effets optiques rapprochent beaucoup des micas à un seul axe, contient aussi une grande proportion de magnésie, comme le prouvent les analyses que M. Vauquelin en a faites, et qui

ont été parfaitement confirmées par celles de M. Klaproth, car ces analyses, rapportées dans le nº 88 du *Journal des Mines*, ont donné pour résultats :

Silice..............	62,
Alumine...........	1, 5
Magnésie...........	27,
Potasse.............	0,
Fer oxidé..........	3, 5
Eau................	6,
	100, 0

Ici les principes constituans sont encore les mêmes que pour le mica jaunâtre à un seul axe, à l'exception de la potasse que l'on n'y trouve plus; l'alumine est aussi réduite à une quantité presque insensible. Ces deux substances sont remplacées par des quantités de magnésie et de silice plus considérables, mais qui conservent entre elles à-peu-près la même proportion que dans le mica jaunâtre. Ce ne sont pas toutefois ces derniers principes seuls qui constituent la condition d'avoir un seul axe, car, dans le mica noir de Sibérie, ils affectent une tout autre proportion. L'analyse chimique nous indique donc encore ici une combinaison essentiellement différente, quoique analogue en quelques points; et les épreuves optiques qui décèlent le système cristallin, nous indiquent aussi une analogie d'action, modifiée par une dissemblance que l'on ne peut méconnaître.

En général, lorsqu'on examine la multitude des minéraux transparens et cristallisés que l'on désigne collectivement sous le nom de pierres, on les trouve, pour la plupart, formés d'un petit nombre de substances toujours à-peu-près les

mêmes, dont les proportions seules, variées par une infinité de degrés divers, déterminent les différences nombreuses d'aspect, de couleur, de dureté, de poids, de réfraction et de forme cristalline que nous observons entre eux. Ce sont presque toujours des composés où l'on retrouve la silice, l'alumine, la chaux, la magnésie, la potasse et des oxides de fer et de manganèse. Ce n'est que dans quelques cas rares que l'on y rencontre aussi la glucine, l'ittria, la zircone, les oxides de chrome, de nickel et de zinc. Il est d'ailleurs impossible de douter de l'état de combinaison de ces principes, quand les composés qui en résultent sont transparens et cristallisés, je ne dis pas seulement à l'extérieur; mais, ce qui est beaucoup plus concluant, à l'intérieur même et dans leurs particules les plus petites, comme le prouvent invinciblement le mode de leur action sur la lumière, et les systêmes réguliers de clivage qu'ils présentent. Or, si l'on admet cet état, comment fera-t-on pour représenter tant de produits divers par des combinaisons en proportions rigoureusement définies? On le pourra sans doute quoique, à la vérité, d'une manière purement numérique, si l'on se permet de compliquer indéfiniment les termes des rapports que l'on établit entre les principes constituans; car, quelles que soient les proportions assignées par l'analyse chimique, on pourra toujours trouver des rapports entiers qui s'en rapprochent dans les limites présumables de ses erreurs. Mais la probabilité d'une pareille représentation décroît comme sa nécessité, c'est-à-dire avec la complication des rapports qu'elle emploie; et, pour reproduire ici un exemple qu'on ne saurait trop répéter, c'est précisément ce principe de simplicité dans les rapports, suivi d'une conformité frap-

pante avec les produits de la nature, qui donne une si grande force à la cristallographie minéralogique, telle que M. Haüy l'a conçue; de sorte que l'on n'aurait pas plus de raison à lui opposer les petites différences que les angles des cristaux ainsi calculés ont encore, en plus ou en moins, avec les angles réels, que l'on n'en aurait eu autrefois, si l'on eût objecté contre les lois de Kepler, que les mouvemens planétaires ne s'exécutaient pas dans des ellipses rigoureuses. Il s'en faut bien que la composition chimique des minéraux admette des limites aussi tranchées. Déja on peut en juger par la complication des rapports qu'un célèbre chimiste a été obligé d'introduire entre les principes constituans de leurs différentes classes, pour les assujettir à la règle des proportions définies. Que serait-ce donc s'il eût eu à représenter cette diversité que l'optique et l'analyse chimique viennent de nous faire découvrir entre les diverses sortes de micas dont j'ai parlé dans ce Mémoire; et pour chacune desquelles la transparence, l'homogénéité de composition, et celle de structure, se réunissent pour attester l'état d'une parfaite combinaison.

Mais maintenant, si tel est le résultat de l'expérience que des produits aussi nombreux puissent, sans proportions fixes, exister combinés, et même cristallisés, du moins sous l'influence des circonstances où les a formés la nature, faut-il s'étonner de cette diversité de composition qu'on observe souvent dans les variétés d'un même minéral, principalement dans les pierres, tantôt les mêmes principes se montrant avec des proportions diverses, tantôt un d'eux disparaissant tout-à-fait et se trouvant remplacé par une nouvelle substance, ou laissant les autres seuls dans le composé? Doit-

on, dans tous les cas où cela arrive, rejeter ces variations sur les erreurs de la chimie, ou sur une interposition grossière et accidentelle d'un des principes, afin de ramener le tout aux deux règles de l'unité de forme et des proportions définies? Il me semble que l'universalité de ce mode d'exclusion est fortement combattue par les faits que j'ai rapportés dans ce Mémoire. Toutefois, je serais bien loin de vouloir nier la justesse de son application dans un très-grand nombre de cas, sur-tout dans ceux où les minéraux sont opaques : car alors mille circonstances fortuites, telles que des décompositions partielles, ou des substitutions progressives, ou le mélange des gangues dans la formation du minéral, ont pu altérer la pureté de sa composition, sans que nous puissions reconnaître ensuite si les matières ainsi introduites n'ont fait que s'interposer entre les joints naturels de ses particules, ou si elles se sont combinées avec sa substance de manière à constituer un corps particulier. Mais, ce qu'il importe de remarquer pour la philosophie de la science, dans l'une de ces suppositions comme dans l'autre, les indications de la chimie ne peuvent plus servir seules de guide pour une classification méthodique, puisque le principe de toute classification pareille doit consister dans un caractère propre à chaque groupe, ce qu'une composition indéfiniment variable ne saurait offrir, soit qu'elle provienne d'un simple mélange ou d'une intime combinaison. Les caractères tirés de l'aspect, quoique susceptibles d'être définis pour chaque individu, ont l'inconvénient d'être établis sur des effets très-composés, susceptibles d'être modifiés par des causes très-légères, et qui, ne tenant que d'une manière éloignée à l'essence même des minéraux, sont, relativement

à une méthode naturelle, à-peu-près ce que serait un vocabulaire relativement à un ouvrage suivi. Reste donc l'observation de la forme, je ne dis pas seulement extérieure, mais intérieure, c'est-à-dire le système cristallin. Ce caractère est, plus qu'aucun autre, susceptible d'être fixé avec exactitude, puisqu'il admet des mesures géométriques. Il a, sur l'aspect, l'avantage infini d'exprimer l'effet le plus immédiat des forces chimiques par lesquelles les minéraux ont été formés; d'être présent et observable dans toutes les parties de leur substance; d'y exister même avant que les dimensions du minéral soient appréciables aux sens, et de lier les unes aux autres toutes les variétés de chaque espèce par une dépendance calculable. Voilà ses avantages propres. Il ne les perdrait pas, quand on viendrait à prouver incontestablement que les mêmes principes avec les mêmes proportions peuvent avoir été combinés par la nature sous deux ou plusieurs formes différentes; ni si l'on trouvait que la même forme a été imprimée à des produits divers, soit rapprochés, soit éloignés dans leur composition. Mais, en lui attribuant ainsi toute la valeur qu'il mérite, sur-tout après les importans travaux qui en ont si heureusement étendu les applications, il faut, à cause de cette valeur même, le soumettre aux épreuves les plus délicates et les plus multipliées; il faut s'efforcer d'en fixer les élémens par les méthodes d'observation les plus précises, examiner scrupuleusement ce qu'ils ont de constant ou de variable, enfin déterminer avec soin toutes les modifications que des circonstances naturelles ou artificielles peuvent y produire. De semblables recherches semblent promettre une infinité de notions nouvelles sur les propriétés de la matière, sur la constitution des parti-

cules des corps, sur les forces qui déterminent leur aggrégation, enfin sur les modifications de ces forces par des agens extérieurs tels que la pression et l'électricité. Ces résultats, appliqués aux accidens de composition, de configuration ou de structure que peuvent présenter les variétés diverses des substances minérales, selon les lieux où la nature les a produites, peuvent donner un jour des caractères pour distinguer les couches terrestres où ces substances se trouvent, et même pour indiquer quelques-unes des circonstances locales qui ont coëxisté avec leur formation. C'est l'espoir d'offrir quelques données pour ces grandes questions qui m'a fait chercher dans les phénomènes de la polarisation de la lumière, ceux qui pouvaient caractériser la régularité de structure des corps transparens cristallisés; afin de suppléer en ce point à l'observation de la forme, soit quand elle manque, soit quand l'impossibilité du clivage la réduit à n'être que l'indice de la configuration extérieure, et non la preuve intime d'un état cristallin continu. Ces caractères, en nous découvrant des différences essentielles de structure entre des minéraux compris jusqu'alors dans une seule famille, n'ont fait que mettre ainsi dans une plus grande évidence, l'extrême importance de la forme, puisque cette famille, ne comprenant que des substances feuilletées, dont la forme complète n'existe point ou n'est qu'imparfaitement observable, se trouvait ainsi privée de ce caractère distinctif, et était, par cela même, celle de toutes les familles minérales qui offrait le moins de certitude dans la légitimité et l'unité de sa composition.

Je terminerai ce Mémoire en joignant ici l'indication de quelques-unes des variétés de mica que j'ai observées, au-

tant toutefois qu'elles peuvent être désignées par des caractères aussi vagues que la couleur et le lieu d'où elles ont été tirées.

MICAS A DEUX AXES RÉPULSIFS.

Compensation des deux axes sous l'angle de 37 *ou* 38°.

Mica rose des États-Unis d'Amérique, en plaques d'un brillant nacré, avec des parties ordinairement teintes en rose par un peu de manganèse; feuillets très-élastiques, exerçant une réflexion spéculaire très-vive, mais rarement plans, et rarement réguliers dans leur superposition. Analysé par M. Vauquelin, pag. 329.

Compensation variable entre 33 *et* 35°.

Mica de Sibérie, en feuilles planes très-fermes; ordinairement d'un jaune sombre et enfumées par un peu d'oxide de fer; feuillets bien plans, très-régulièrement superposés, aisément et continuement séparables, jusqu'à une ténuité extrême; exerçant une réflexion spéculaire très-vive, et offrant un poli parfait quand on les sépare les uns des autres. Analyse de divers échantillons par M. Vauquelin, pag. 325 et 330.

Je dois à la complaisance de M. Leman deux échantillons de ce mica qui avaient des faces obliques sur leurs bases, et dont la netteté était assez grande pour qu'on pût s'en servir comme de prismes. J'y ai observé par ce moyen l'existence de la double réfraction; mais le peu d'étendue des faces ne m'ayant pas permis de mesurer leurs angles, ni de prendre avec exactitude l'écart des deux images réfractées, il ne m'a

pas été possible de reconnaître dans les déviations du rayon l'effet des influences simultanées des deux axes.

J'ai trouvé aussi des angles de compensation compris dans les limites de 33 à 35° dans un grand nombre de variétés dont les aspects divers ont de commun le poli spéculaire et l'élasticité de leurs feuillets. Je citerai dans le nombre le mica argentin des grandes Rousses, dans le département de l'Isère;

Le mica en grandes feuilles, de Couserans, dans les Pyrénées;

Le mica d'Arendal, en Norwége, remarquable par l'éclat argenté de ses lames, et par la forme presque toujours irrégulièrement pyramidale qu'elles affectent dans leur superposition.

Compensation sous l'angle de 30°.

Dans cette limite, je citerai : un mica verdâtre à surface inégale et à feuilles toujours un peu plissées, qui vient du Mexique; analysé par M. Vauquelin, pag. 335;

Un mica blanc d'argent en lames excessivement fragiles, qui vient de Russie;

Un mica venant de Philadelphie, et qui se trouve en grandes feuilles;

Enfin le mica hexagonal du Saint-Gothard, dont les échantillons m'ont paru offrir un angle de compensation de 31 ou 32°.

Compensation sous l'angle de 25°.

Le mica de Zinnwald en Bohême, analysé par M. Vauquelin, pag. 331.

MICAS A UN SEUL AXE RÉPULSIF.

1° Mica cristallisé verdâtre, venant de Ceylan, où il se

trouve dans les sables avec les rubis; l'échantillon que j'ai eu à ma disposition appartient au cabinet du Roi, et se trouve décrit dans le catalogue, pl. IV, fig. 74. J'ai pu non-seulement observer mais mesurer la double réfraction dans ce cristal, suivant un plan perpendiculaire à l'axe; j'ai reconnu ainsi qu'elle était répulsive, comme l'action polarisante de ses lames l'indiquait. En appliquant à ces mesures la théorie de M. Laplace, j'en ai conclu la valeur suivante pour le quarré de la vîtesse de la lumière dans le rayon extraordinaire :

$$V^2 = 2,47308 - 0,10095 \, sin.^2 U.$$

V est cette vîtesse; U est l'angle que l'axe du cristal forme avec le rayon réfracté extraordinairement. Quand ce rayon suit l'axe même, U est nul, et le quarré de la vîtesse se réduit à 2,47307 dont la racine quarrée 1,5726 est le rapport de réfraction ordinaire.

2° Mica du Vésuve et de la Somma, en lames très-pures et comme vitrées; souvent en pyramide inclinée, dont une ou plusieurs faces seulement sont obliques sur les bases.

3° Mica jaunâtre, un peu onctueux au toucher, à réflexion spéculaire imparfaite. Analysé par M. Vauquelin, pag. 325.

4° Mica foliacé noir de Sibérie : les lames minces, vues par transmission, ont une teinte de vert sombre qui ressemble au vert du 3e ordre des anneaux réfléchis. Analysé par Klaproth, pag. 336.

5° Mica vert du Groënland.

6° Mica volcanique des bords du Rhin.

7° Mica rouge du Piémont, coloré par le manganèse.

8° Mica rectangulaire verdâtre de Topsham aux États-Unis.

Et beaucoup d'autres variétés dont le gisement ne m'a pas été indiqué.

MICAS A UN SEUL AXE ATTRACTIF.

Mica verdâtre de la vallée d'Alla en Piémont : en cristaux quelquefois transparens, dont la surface est un peu molle et comme onctueuse au toucher, ce qui a porté quelques minéralogistes à le considérer comme un talc; mais le talc laminaire est à axes répulsifs.

En achevant cette énumération, je dois rappeler qu'il ne faudrait pas considérer deux substances comme identiques parce que leurs cristaux n'auraient également qu'un seul axe, ou deux axes de forces polarisantes. Cette similitude offrirait entre elles un rapprochement, mais non pas une identité. Ainsi le béril et le spath d'Islande n'ont qu'un axe, et cependant diffèrent dans leur nature aussi-bien que dans leur cristallisation. Sans doute on irait plus loin dans la comparaison de deux substances, si l'on pouvait joindre à la nature simple ou complexe du système de forces polarisantes, la mesure de son intensité. Mais cette évaluation exige des lames plus planes et plus pures qu'on n'en rencontre communément.

MÉMOIRE

SUR LE SUCRE DE BETTERAVE,

PAR MONSIEUR LE COMTE CHAPTAL.

Lu à la séance de la première Classe de l'Institut royal de France, le 23 octobre 1815.

LES vingt-cinq années qui viennent de s'écouler formeront une époque mémorable dans les annales de l'industrie française; la plupart des événemens extraordinaires qui se sont succédé ont concouru à favoriser ses progrès. La France, privée de ses colonies, bloquée sur toutes ses frontières, s'est vue réduite à ses propres forces et à ses seules ressources; et en mettant à contribution les lumières de ses habitans, et les productions de son sol, elle est parvenue à satisfaire à tous ses besoins, à créer des arts qui n'existaient nulle part, à perfectionner ceux qui étaient connus, et à s'affranchir des pays étrangers pour la plupart des objets de sa consommation. C'est ainsi que nous avons vu successivement perfectionner le raffinage du salpêtre, la fabrication des armes et de la poudre, le tannage des cuirs, la filature du coton, de la laine et du lin ; améliorer le tissage des étoffes et en exécuter plusieurs qui nous étaient étrangères; décomposer le sel marin pour en extraire la soude; former, de toutes pièces, l'alun et

les couperoses; fixer sur les tissus plusieurs couleurs qu'on regardait comme *faux teint*, et remplacer le sucre de canne par celui de betterave, l'indigo de l'anil par celui du pastel et l'écarlate de cochenille par la garance. On eût dit que les savans détournaient leur attention de dessus les misères publiques pour ne la fixer que sur les moyens de soulager le peuple et d'alléger le fardeau de son infortune.

Quoique ces découvertes et beaucoup d'autres soient aujourd'hui des opérations de fabrique, il est à craindre que quelques-unes ne retombent dans l'oubli, ou par la facilité qu'on a de puiser aujourd'hui aux anciennes sources, ou par suite de l'habitude et des préjugés qui recommandent aux yeux du consommateur, ce qui est usité depuis long-temps, ou enfin par de fausses mesures en administration; et je crois qu'il serait extrêmement utile de décrire avec soin tous ces procédés et de les confier à nos neveux. On verrait au moins ce qu'a pu la science pour la prospérité d'une nation; et l'on en retirerait cette vérité consolante, c'est que la France peut se suffire à elle-même pour satisfaire à tous ses besoins.

Je me bornerai aujourd'hui à faire connaître comment la France est parvenue à suppléer au sucre du nouveau-monde, par des produits de son sol; et si l'Institut agrée ce travail, j'aurai l'honneur de lui soumettre successivement tous les divers procédés de fabrication qui peuvent intéresser l'industrie, le commerce, et la nation.

On se rappelle avec effroi ces temps difficiles où les Français, exilés des mers, n'avaient plus aucune communication, ni avec leurs colonies, ni avec celles des autres nations. La France se trouva privée, tout-à-coup, de tous les produits de l'Asie et de l'Amérique, dont la plupart sont devenus pour

elle des objets de première nécessité : elle fit un appel à l'industrie de ses habitans; le gouvernement encouragea leurs efforts; et, en peu de temps, on parvint à remplacer quelques produits par des produits indigènes, et à trouver, dans les productions de notre sol, des objets absolument de même nature que ceux qu'on avait tirés jusques-là du nouveau-monde : les cotons d'Espagne, de Rome et de Naples, surtout ceux de Castellamare, suppléaient à ceux de l'Amérique et de l'Inde; la garance remplaçait la cochenille par le procédé de M. *Gonin ;* le pastel, traité dans les ateliers de MM. *Puymaurin*, *Rouqués* et *Giobert*, fournissait un excellent indigo, et les nombreuses fabriques de sucre de betterave qui s'étaient formées annonçaient à l'Europe qu'on était au moment de secouer le joug du nouveau-monde.

A peine ces établissemens ont-ils été formés, à peine les procédés, encore imparfaits, ont-ils été établis, qu'un nouvel ordre de choses a remplacé l'ancien; la paix a rouvert toutes nos communications, les habitudes ont repris leur empire, et peu s'en faut qu'on n'ait relégué au rang des chimères la possibilité de fabriquer chez nous le sucre et l'indigo. Cependant, quelques personnes ont continué et continuent à fabriquer du sucre de betterave, et il est facile de prouver qu'elles peuvent soutenir cette fabrication concurremment avec les colonies; c'est ce que je crois démontrer dans ce Mémoire.

Lorsque la France a commencé à éprouver le besoin du sucre, on a cherché, dans les sirops de quelques fruits, surtout du raisin, le moyen d'y suppléer, et l'on a singulièrement amélioré cette fabrication. De grands établissemens se sont formés, sur plusieurs points du royaume, pour la fa-

brication des sirops et ils ont produit deux grands résultats également avantageux; le premier, de verser dans la consommation une énorme quantité de sirops qui remplaçait le sucre dans plusieurs usages domestiques, et exclusivement dans les hopitaux; le second, de donner de la valeur à nos raisins qui, à cette époque, n'en avaient presqu'aucune.

Peu de temps après, on a trouvé le moyen d'extraire un sucre farineux et solide du raisin, et ce produit a présenté plus d'analogie avec le sucre de canne que le sirop; il était, comme lui, sans odeur et pouvait le remplacer dans tous ses usages en l'employant à un poids double ou triple pour obtenir le même effet. Ce sucre n'est point susceptible de cristallisation.

A-peu-près dans le même temps la chimie a fourni le moyen de décolorer le miel, et de lui enlever son odeur, de telle sorte qu'on pouvait l'employer dans les infusions de thé et de café comme le meilleur sirop de sucre.

Tous ces procédés étaient devenus des opérations de ménage, et on éprouvait à peine quelque privation de la rareté du sucre de canne; mais il était réservé à la chimie de produire dans nos climats le véritable sucre des colonies et c'est ce qui n'a pas tardé à arriver. Déja les analyses de *Margraaf* et les travaux d'*Achard*, sur le sucre de betterave, avaient mis sur la voie; il ne s'agissait plus que de perfectionner les procédés et de former des établissemens en assez grand nombre pour fournir à la consommation: à cet effet, les encouragemens ont été prodigués; et, en une année, on a vu se former plus de cent cinquante fabriques dont quelques-unes ont obtenu de grands succès et ont versé dans le commerce plusieurs millions d'excellent sucre. La plupart

de ces établissemens ont dû échouer sans doute, comme cela arrive pour tous les nouveaux genres d'industrie, soit parce que la localité est mal choisie, soit parce qu'on se livre à de trop grandes dépenses pour monter les ateliers, soit enfin parce qu'on n'opère pas avec assez d'intelligence.

Au milieu de ce vaste naufrage de fabriques, nous en voyons quelques-unes qui ont résisté et qui prospèrent depuis quatre ans; c'est dans celles-ci qu'il faut puiser les leçons d'une bonne pratique et d'une administration économique. C'est là que nous trouverons les bons procédés, soit pour la culture de la betterave, soit pour l'extraction du sucre; et, comme la mienne est de ce nombre, je me bornerai à citer mon expérience.

CHAPITRE PREMIER.

Culture de la Betterave.

Les betteraves se sèment à la fin de mars ou en avril, du moment qu'on n'a plus à craindre les gelées.

ARTICLE PREMIER.

Choix de la graine.

Il y a des betteraves blanches, il y en a de jaunes, de rouges, et de marbrées, et quelquefois la pellicule est rouge et la chair est blanche.

Il est aujourd'hui reconnu par les agriculteurs, sur-tout par ceux d'Allemagne, que la couleur ne se reproduit pas constam-

ment, et que dans le produit d'un champ où l'on n'a semé que de la graine provenant de betteraves jaunes, par exemple, il s'en trouve plus ou moins de blanches ou de rouges; c'est ce que j'ai eu occasion de vérifier moi-même.

En Allemagne, on donne la préférence à la betterave blanche; en France, on préfère la jaune. Il m'a paru, d'après des expériences comparatives, qu'on donnait trop d'importance à la couleur; je n'ai pas observé que la variété des couleurs produisît une variété sensible dans les résultats lorsque les betteraves provenaient du même sol et de la même culture.

ART. II.

Choix du terrain.

Le terrain le plus propre à la betterave paraît être celui qui est à-la-fois meuble et gras, et qui a de la profondeur.

Les terres maigres, sèches, sablonneuses, conviennent peu: les betteraves y sont petites et sèches; elles donnent un suc qui marque jusqu'à onze degrés au pèse-liqueur de Baumé, mais qui est peu abondant: il m'est arrivé de n'en extraire que 32 pour cent; le suc est très-chargé de sucre, mais la proportion ne dédommage pas le fabricant.

Les terres fortes, grasses, argileuses, ne conviennent pas non plus. Les graines y lèvent mal, sur-tout si, après les semences, il survient une forte pluie qui tasse la terre et ferme l'accès à l'air; alors la graine pourrit sans germer. J'ai perdu, en 1813, dix hectares de betteraves par cet accident; il est même rare que dans ces terres fortes, la betterave acquière beaucoup de grosseur, elle pousse en dehors parce qu'elle ne peut pas se loger en dedans.

Les terres provenant du défrichement des prairies, les terres d'alluvion fumées et travaillées depuis long-temps, sont très-propres à la culture des betteraves.

Un bon terrain peut fournir jusqu'à cent milliers de betteraves par hectare, j'en ai même récolté jusqu'à cent vingt sur un pré nouvellement défriché, mais le produit moyen est de quarante à cinquante milliers.

ART. III.

Préparation du terrain.

La terre destinée à recevoir des betteraves doit être préparée par deux ou trois labours très profonds.

Depuis trois ans je sème mes betteraves dans les terres qui doivent recevoir du blé en automne; je les dispose par deux bons labours et un engrais convenable; je sème vers la fin d'avril, et arrache dans les premiers jours d'octobre. Je laisse les feuilles sur le terrain, sème le blé, et le recouvre par un labour ordinaire; de cette manière ma récolte de betteraves est une récolte intermédiaire qui ne prive pas le domaine d'un grain de blé. Trois années d'expériences m'ont prouvé que la récolte de blé était aussi bonne sur ces terrains que sur ceux qui s'étaient reposés pendant l'été: il y a plus, c'est que les sarclages et l'arrachement ont nettoyé le sol de toutes les plantes étrangères, et que les champs de blé en sont moins chargés que par-tout ailleurs.

On a cru, pendant quelque temps, que les terres fraîchement fumées produisaient des betteraves moins riches en sucre; on a même ajouté que celles qui étaient fumées avec du fumier de mouton ne donnaient que du salpêtre; je puis

affirmer que ces assertions sont erronées, et que la production du salpêtre tient à une autre cause que nous ferons connaître par la suite.

ART. IV.

Manière de semer.

On a successivement employé quatre méthodes pour semer la graine de betterave: 1° à la main; 2° au semoir; 3° à la volée; 4° en couche ou pépinière.

1° Pour semer à la main, on fait passer sur la terre labourée une herse armée de quatre à cinq dents, espacées d'un pied l'une de l'autre; des femmes qui suivent la herse mettent les graines une à une dans les sillons que tracent les dents de la herse en observant de les placer à une distance de 13 à 14 pouces l'une de l'autre, on les recouvre ensuite avec des herses d'épines.

Cette méthode a le double avantage d'économiser la graine et d'espacer convenablement les betteraves pour qu'elles puissent se développer. Une femme peut, à la rigueur, en semer dix mille par jour; et en général, quatre femmes peuvent semer un arpent ou un demi-hectare chaque jour. Un âne et un enfant suffisent pour promener la herse, de sorte que cette méthode est très-économique.

2° Dans la plaine des Vertus, aux environs de Paris, on a introduit, depuis deux ou trois ans, l'usage du semoir.

Ce semoir consiste en un chariot, à l'essieu duquel sont fixées quatre ou cinq roues en cuivre d'un pied de diamètre et placées à la distance d'un pied l'une de l'autre. Chacune de ces roues a trois petites cavités ou excavations sur sa circonférence. On a fixé une trémie dans laquelle on met la

graine; la circonférence des roues communique avec le fond de la trémie, et leurs cavités se chargent de graine en tournant; mais, comme les roues frottent, en sortant de la trémie, contre des morceaux d'étoffe, il ne reste qu'une graine dans leurs cavités, laquelle est versée sur le sol par le mouvement de rotation. La graine est recouverte, dès qu'elle tombe, par une palette fixée au chariot en arrière de l'essieu; cette palette tranchante fait l'office de la herse, et découvre la terre à un pouce de profondeur.

Cette méthode est sans doute la plus économique; on peut l'appliquer au blé avec un grand avantage. Un cheval et un enfant peuvent semer, en un jour, plusieurs hectares par ce procédé.

3° Il y a des cultivateurs qui commencent par semer en couche ou en pépinière, et qui transplantent ensuite les jeunes plans par repiquage : cette méthode présente plusieurs avantages à l'agriculteur en ce qu'il n'est pas détourné de ses opérations du printemps pour ses semences des blés de mars et des prairies artificielles, et qu'il ne s'occupe de transplanter ses betteraves que dans les premiers jours de juin, époque qui commence à devenir pour lui une saison morte, mais elle offre des inconvéniens majeurs : le premier de ces inconvéniens, c'est qu'il est bien difficile qu'en arrachant ces jeunes plantes très-tendres et cassantes, on ne laisse dans la terre la pointe de la queue de la betterave, et, dès-lors, elle ne plonge plus dans le terrain, sa surface se recouvre de radicules ou brindilles, et la betterave grossit sans s'allonger. Le second inconvénient attaché au repiquage, c'est qu'en plaçant la betterave dans le trou qu'on a fait avec le plantoir, il est difficile que la pointe de la queue ne se replie pas, et, dès-lors, on

éprouve tous les mauvais effets que je viens de signaler. Le troisième inconvénient, c'est que cette méthode est plus coûteuse que les autres; et le quatrième enfin, c'est que le repiquage exige un temps pluvieux, ce qui ne se rencontre pas souvent, ou un arrosement artificiel, ce qui n'est pas possible dans toutes les localités.

Cependant un repiquage partiel est très-souvent indispensable, car il arrive quelquefois que les betteraves lèvent mal et inégalement, et il est alors avantageux de remplir les vides. Il est donc prudent d'avoir en réserve un semis de betterave pour pouvoir remplacer celles qui manquent.

4° La quatrième méthode de semer les betteraves consiste à les semer comme le blé ou à la volée; on recouvre ensuite à la herse. Cette méthode, la plus simple de toutes, est celle à laquelle je donne la préférence : à la vérité, on emploie beaucoup plus de graine que par les autres procédés; il en faut environ trois kilogrammes au lieu d'un et demi par demi-hectare; mais cette considération n'a presque plus de valeur depuis que le prix de la graine est descendu à un taux raisonnable, et les avantages qu'on en retire sont immenses : 1° En employant cette quantité de graine, on est à-peu-près sûr que tout le sol sera couvert. 2° Dès que la plante est bien levée, on enlève, par un premier sarclage, toutes les betteraves inutiles, et on ne conserve que les pieds les plus vigoureux, de sorte que, quelle que soit la saison, on est toujours sûr d'avoir une bonne récolte.

ART. V.

Des soins qu'exige la betterave pendant la végétation.

Il n'est peut-être pas de plante qui souffre plus du voisi-

nage des herbes étrangères : mais, en général, deux sarclages suffisent pour une récolte. C'est de l'argent bien placé que celui qu'on y emploie : le produit d'un arpent bien sarclé est au moins double de celui qui ne l'a pas été.

ART. VI.

Arrachement des betteraves.

En général, on arrache les betteraves dans le courant d'octobre : on commence l'opération dans les premiers jours, et elle est terminée vers le quinze.

On ne doit pas regarder l'époque où il convient d'arracher la betterave comme une chose indifférente : celle que nous déterminons m'a paru la plus favorable pour les environs de Paris, et à une distance de quarante à cinquante lieues de la capitale; mais personne n'ignore que, dans l'acte de la végétation, il y a une succession de produits différens qui se forment et se remplacent les uns les autres, de sorte que l'existence du sucre cristallisable dans la betterave n'a qu'un temps, et c'est ce temps qu'il faut choisir pour arracher. Dans nos climats du midi, par exemple, où la végétation est plus hâtive, vainement on a essayé d'extraire du sucre de la betterave arrachée en automne; il paraît que, dans cette saison, l'époque de la saccarification est passée, et que le sucre s'est décomposé par les progrès de la végétation ou par une altération quelconque dans la betterave; je puis citer, à l'appui de mon opinion, un fait bien constaté par M. *Darracq*, dont l'académie connaît les talens et le bon esprit : il y a trois ans que, de concert avec le préfet du département des Landes, M. le comte d'Angos, il forma le projet d'établir une sucrerie

de betteraves; dès le mois de juillet jusqu'à la fin du mois d'août, il fit l'essai de ses betteraves tous les huit jours, et constamment il en retira trois et demi pour cent de beau sucre. Dès-lors il se crut sûr du succès, et donna tous ses soins à former l'établissement sans continuer ses essais hebdomadaires : mais quelle fut sa surprise, lorsqu'en travaillant ses betteraves, vers la fin d'octobre, il ne lui fut pas possible d'extraire un atôme de sucre cristallisé?

Il paraît que, lorsque la betterave a terminé sa végétation *saccharine*, si je puis m'exprimer ainsi, il se forme du nitrate de potasse aux dépens des principes constituans du sucre : et cette formation a lieu dans la terre lorsqu'elle est favorisée par la chaleur, tout comme dans les magasins. Dans le mois de mars 1813, je voulus exploiter des betteraves que j'avais enfermées dans une cave, et je n'obtins que du nitrate de potasse, quoiqu'elles ne fussent ni germées ni pourries; ces betteraves me donnaient un tiers de moins de suc que celles qui avaient été gardées en plein air ou dans des magasins bien aérés.

Il n'est point rare de voir sortir des bouffées de gaz nitreux des écumes abondantes qui se forment lorsqu'on verse le suc de la betterave dans une chaudière(1); la production de ce gaz annonce un commencement d'altération dans la betterave, quoique, dans cet état, on puisse en extraire encore du sucre ; j'ai observé, plusieurs fois, ce phénomène et toujours dans les circonstances dont je viens de parler. Par les progrès de l'altération, ce gaz nitreux passe à l'état d'acide

(1) M. Barruel est, je crois, le premier qui ait observé ce phénomène.

nitrique, cet acide s'unit à la potasse pour former des nitrates, et, dès-lors, la décomposition du sucre cristallisable est complète.

Ne soyons donc plus surpris si, dans tout le midi, depuis Bordeaux jusqu'à Lyon, en opérant sur des betteraves qui avaient séjourné dans la terre jusqu'à la fin d'octobre, on n'a pu retirer que du nitrate de potasse et pas un atôme de sucre cristallisable.

A mesure qu'on arrache les betteraves, on les dépouille de leurs feuilles qu'on laisse, comme engrais, sur le terrain, lorsqu'on n'a pas assez de bestiaux pour les consommer.

ART. VII.

Conservation des betteraves.

Les betteraves craignent les gelées et la chaleur : elles gèlent à une température au-dessous de zéro ; elles commencent à s'altérer à une température de huit à neuf degrés au-dessus de la glace fondante.

Les betteraves gelées donnent du sucre si on les travaille dans cet état, mais elles fournissent beaucoup moins de suc. Lorsqu'elles sont dégelées elles n'en fournissent plus.

Pour conserver les betteraves sans altération, il faut les placer dans un lieu sec et à une température qui ne soit que de quelque degrés au-dessus de zéro du thermomètre. Une grange, un grenier, sont des lieux très-propres à former un magasin de cette nature, mais il est rare de pouvoir y loger tout l'approvisionnement d'une fabrique. A défaut d'un local couvert et assez spacieux, on est forcé de loger les betteraves en plein air, et, à cet effet, on choisit un sol sec et qui soit à l'abri des inondations, on le recouvre d'une couche

de cailloutage, sur laquelle on met de la paille : on dresse dans le milieu un piquet qu'on entoure, sur toute la hauteur, de bouchons de paille; on entasse les betteraves tout autour du piquet et on en forme des quarrés de sept à huit pieds sur cinq à six de hauteur. On enlève ensuite le piquet, de manière que l'espace qu'il occupait devient une cheminée par où peuvent sortir les vapeurs qui s'échappent des betteraves. On recouvre ensuite les parois latérales, et la sommité de la couche avec de la paille de seigle ou d'avoine : on a l'attention d'établir en pente la sommité de la couche, pour que la pluie ne puisse ni filtrer ni séjourner, et l'on assujétit fortement la paille avec des liens pour la mettre à l'abri de la force des vents.

Il y a des cultivateurs, sur-tout dans le nord, qui, pour conserver leurs betteraves, les entassent dans les champs, les recouvrent de terre et enveloppent le tout d'une couche de bruyère ou de genêts pour que l'eau n'y pénètre pas.

Mais, quelle que soit la méthode qu'on adopte pour emmagasiner les betteraves, il y a des précautions générales et indispensables à suivre, dont dépend leur conservation.

1° Il faut avoir l'attention de ne pas emmagasiner les betteraves mouillées; et, lorsque le temps le permet, il convient de les laisser dans les champs, pendant quelques jours, pour qu'elles sèchent.

2° Il ne faut recouvrir les betteraves que du moment qu'on est menacé d'une gelée, et avoir l'attention de les découvrir et de les laisser découvertes tant que la température est de quelques degrés au-dessus de la glace, pourvu toutefois qu'il ne pleuve pas.

3° Il faut visiter souvent les betteraves, et, si on s'aper-

çoit qu'elles s'échauffent, qu'elles pourrissent ou qu'elles germent, il convient de démonter le tas, d'enlever celles qui commencent à germer ou à se pourrir, de même que celles qui pourraient être gelées pour les travailler de suite, et de rétablir ensuite la couche.

CHAPITRE II.

De l'extraction du sucre.

L'extraction du sucre de la betterave donne lieu à une suite d'opérations que nous allons décrire successivement. Depuis quatre ans qu'on travaille la betterave en France, on a successivement employé beaucoup de procédés, et l'on a apporté de grandes modifications dans chacune des opérations; je les ai tous vérifiés, je les ai tous comparés, et je me bornerai à décrire celui qui constamment m'a présenté les meilleurs résultats.

ARTICLE PREMIER.

De l'épluchement des betteraves.

Les betteraves qu'on transporte des champs sont plus ou moins chargées de terre, leur surface est plus ou moins couverte de radicules; et, avant de les travailler, il faut les débarrasser de tous ces objets, et couper le collet qui ne contient pas sensiblement de sucre. Dans quelques fabriques, on enlève la terre par des lavages, et on coupe les radicules et le collet avec des couteaux; mais le lavage est long et dispendieux; il exige une grande quantité d'eau, et l'opération est difficile pendant les froids rigoureux de l'hiver(1).

(1) Pour procéder économiquement au lavage des betteraves, on en

J'ai supprimé le lavage dans ma fabrique, et je me borne à faire couper les collets et les radicules, et à faire ratisser ou nettoyer la surface des betteraves avec un couteau : cette opération, qui s'exécute avec facilité par des femmes, coûte 12 s. ou 60 cent. par millier.

ART. II.

Extraction du suc de la betterave.

On extrait le suc de la betterave par deux opérations successives.

1° On réduit la betterave en pulpe à l'aide de rapes mues à la main ou par le moyen d'un manége ; les meilleures de ces rapes sont celles à cylindres armés, à leur surface, de lames dentées ; on imprime à ces cylindres un mouvement si rapide, à l'aide de l'engrainage, qu'ils font environ quatre cens révolutions sur eux-mêmes par minute ; on présente la betterave à la circonférence, et elle est déchirée et réduite en pulpe en un instant.

Deux de ces rapes mues par le même manége et servies par trois femmes et deux enfans, peuvent suffire à une exploitation journalière de dix milliers pesant de betteraves, en

---

met 100 à 140 livres dans un cylindre dont le contour est en gros fil de fer ; la moitié de ce cylindre plonge dans l'eau d'une auge placée au-dessous. On imprime un mouvement de rotation au cylindre ; en peu de temps les betteraves sont dépouillées de la terre qu'elles contiennent. On élève alors le cylindre au-dessus de l'auge par le moyen d'un treuil ; on ouvre une porte pratiquée sur la circonférence du cylindre, et les betteraves tombent et glissent sur un plan incliné qui les porte en dehors de l'auge.

opérant deux heures le matin de cinq à sept heures, et deux heures, depuis onze heures jusqu'à une heure après midi. Il est rare qu'on soit obligé d'employer deux heures et demie pour chaque opération.

Immédiatement après que l'opération de la rape est terminée, les personnes qui y sont employées s'occupent à nettoyer les rapes, à les laver, et a transporter, tout autour des rapes, les cinq milliers de betteraves qui doivent servir à une seconde opération. Pour que la pulpe soit de bonne qualité, il faut qu'elle ne présente qu'une pâte molle, sans mélange de parties de betteraves non broyées, car la presse, quelque force qu'on lui suppose, ne peut extraire qu'une faible portion de suc des fragmens de betterave qui n'ont pas été déchirés. Lorsqu'on se borne à écraser la betterave sous des meules, comme cela se pratique pour le cidre et le poiré, on n'obtient à la presse que trente à quarante pour cent de jus, tandis que, lorsqu'on les déchire par les rapes, on en extrait soixante-cinq à soixante-quinze pour cent.

2° A mesure qu'on forme la pulpe, on la soumet à la pression pour en extraire le suc : je commence par la soumettre à la pression de petites presses à levier, et j'en retire trente à quarante pour cent de suc, on porte ensuite le marc ainsi exprimé sous des presses beaucoup plus fortes qui en extraient encore autant, de sorte qu'on retire soixante-cinq à soixante-quinze pour cent de suc. L'opération est parfaite, lorque le marc est assez desséché pour que la main, en le pressant fortement, n'en soit pas mouillée.

On donne cette pression à l'aide de fortes presses à vis de fer, à l'aide de la presse hydraulique, des presses à cylindre ou de la presse à cric. On peut même employer à cet usage

le pressoir de la vendange. Pour diminuer les frais de la main-d'œuvre, j'ai placé mes rapes et mes presses au premier étage, de manière que le suc se rend, de lui-même, par des canaux de plomb, dans les chaudières qui sont au rez-de-chaussée.

Il convient d'exprimer la pulpe à mesure qu'elle se forme, sans cela elle noircit, et il se développe un commencement de fermentation qui rend l'extraction du sucre plus difficile.

Le suc marque depuis cinq jusqu'à onze degrés, et communément sept à huit au pèse-liqueur de Baumé.

Quatre hommes suffisent pour le travail des presses, en opérant sur dix milliers de betteraves par jour.

ART. III.

Dépuration du suc.

Nous avons dit qu'à mesure que le suc coulait des presses, il se rendait dans une chaudière que j'appelle *dépuratoire*, par rapport à son usage. En supposant qu'on fasse deux opérations par jour, et qu'on travaille cinq milliers de betteraves chaque fois, cette chaudière, de forme ronde, doit avoir cinq pieds et demi de large sur trois pieds huit pouces de profondeur; dans ces dimensions elle peut recevoir tout le produit d'une opération.

Dès que la chaudière est remplie au tiers ou à moitié, on allume le feu. Le suc a déja pris un chaleur de quarante à cinquante degrés lorsqu'on a fini d'extraire le suc qui coule, sans interruption, des presses dans la chaudière; on porte alors la chaleur du bain à soixante-cinq ou soixante-six degrés; et, du moment qu'on a atteint ce degré, on étouffe le feu en le recouvrant de braise mouillée. On jette alors, dans la chaudière, de la chaux, qu'on a fait fuser dans l'eau tiède, dans la

proportion de deux grammes et demi (environ quarante-huit grains) par litre de suc, en ayant soin de varier la proportion suivant le degré de consistance du suc. On brasse la masse du liquide dans tous les sens pendant quelques minutes. Alors on ranime le feu pour porter la chaleur du bain à quatre-vingts degrés, c'est-à-dire jusqu'au degré le plus voisin de l'ébullition. On enlève alors le feu du foyer. Il se forme par le repos une couche à la surface du bain qui, en demi-heure, acquiert de la consistance, et qu'on enlève soigneusement, avec l'écumoire, au bout de trois-quarts d'heure. Dès qu'on a écumé, on ouvre un robinet qui est placé à un pied du fond de la chaudière, la liqueur coule d'elle-même dans une chaudière quarrée : on ouvre ensuite un second robinet, qui est placé au niveau du fond de la chaudière pour la vider en entier, et l'on fait tomber la liqueur sur un filtre d'où elle se rend dans la chaudière quarrée.

ART. IV.

Formation des sirops.

La chaudière dans laquelle se rend le suc épuré doit avoir huit pieds de long sur cinq et demi de large et vingt-deux pouces de hauteur.

Dès que le fond de cette chaudière est couvert de liquide, on allume le feu et on porte, le plus promptement possible, à l'ébullition. Au moment ou le bain entre en ébullition, on y verse de l'acide sulfurique délayé dans vingt parties d'eau, et dans la proportion du dixième de la chaux employée; on agite le bain pour que le mélange se fasse également : on peut employer avec succès les papiers teints avec le curcuma et avec le tournesol pour s'assurer qu'il n'y a dans le bain

ni excès de chaux ni excès d'acide; il convient de laisser exister un excès de chaux, et ne plus employer d'acide du moment que la couleur du papier de curcuma ne prend plus dans le bain qu'une nuance de brique pâle ou de vin blanc foncé.

Après cette opération, on mêle à la liqueur trois pour cent de charbon animal bien broyé en poudre impalpable; et, un moment après, on y ajoute une moitié du charbon qui a servi la veille (1).

On évapore à la consistance de dix-huit à vingt degrés bouillant; on fait couler alors dans une chaudière plus petite et plus profonde, et on laisse reposer jusqu'au lendemain où l'on procède à la cuite des sirops.

ART. V.

Cuite des sirops.

La cuite des sirops est l'opération la plus délicate, mais elle a été rendue extrêmement facile par les perfectionnemens qu'on a portés dans les opérations préparatoires, sur-tout depuis qu'on a introduit l'usage du charbon animal. La plupart des fabricans ont échoué à la cuite des sirops; et ce qui devait être attribué à une mauvaise manipulation l'a été généralement, tantôt à ce qu'on a cru que les betteraves qu'on

(1) On a observé que le charbon provenant de la préparation du bleu de Prusse produisait un meilleur effet que celui qui provient de la distillation des matières animales dans les fabriques de sel ammoniac; ce qui paraît tenir à son extrême division par la calcination : car on a constaté que le charbon animal produit d'autant plus d'effet, qu'il est plus atténué et divisé par le broiement.

travaillait ne contenaient pas de sucre, et tantôt à la difficulté presqu'insurmontable qu'on supposait de l'extraire. Aujourd'hui cette opération est devenue tellement facile qu'il ne se forme plus d'écumes, qu'on ne brûle jamais la cuite, et qu'elle n'exige presque plus de soin de la part de l'ouvrier qui la conduit.

Pour procéder à la cuite des sirops, on commence par filtrer, à travers une grosse étoffe de laine, le suc rapproché la veille, et qui conserve encore une partie de sa chaleur; on le verse dans une chaudière ronde de deux pieds de large sur dix-huit pouces de hauteur, on la remplit au tiers, et on porte à l'ébullition qu'on entretient jusqu'à la fin de l'opération.

Si, par hasard, la cuite brûle, ce qui s'annonce par des bouffées de fumée blanche qui partent du fond de la chaudière et viennent crever à la surface du bain en répandant une odeur de fumée assez piquante, on ralentit le feu, on remue la liqueur, et on procède à la cuite avec plus de ménagement. Cet accident était commun il y a trois ans; mais, en suivant le procédé ci-dessus, il est bien rare qu'il reparaisse.

Si le bain écume, monte et se gonfle, on appaise ce mouvement en jetant dans le bain un atôme de beurre ou en modérant le feu. On connaît que la cuite se fait bien, 1° lorsqu'elle bout *sec* et avec bruit; 2° lorsque le sirop se détache de l'écumoire sans filer et sans adhésion; 3° lorsqu'en battant le bouillon avec le dos de l'écumoire on entend un coup sec comme si on frappait sur de la soie; 4° lorsqu'il ne se produit presque pas d'écume; 5° lorsqu'en prenant de la mousse ou des bulles sur le bouillon avec l'écumoire les bulles dis-

paraissent de suite et se résolvent en liquide. C'est ce dernier caractère qui sert à distinguer les bulles du bouillon de celles des écumes; on reconnaît encore une bonne cuite toutes les fois qu'après avoir vidé la chaudière, on n'aperçoit dans le fond aucune trace de noir et que la surface paraît décapée.

On juge que la cuite est terminée d'après les signes suivans : 1° on plonge l'écumoire dans le sirop, on la retire et on passe rapidement le pouce sur le bord pour prendre un peu de sirop, on manie cette couche entre l'index et le pouce jusqu'à ce qu'elle ait la température de la peau, alors on sépare rapidement les deux doigts ; lorsque la cuite n'est pas à son terme, il ne se forme pas de filet entre les doigts ; lorsqu'il commence à se former un filet la cuite est bien avancée et alors on répète souvent la même opération. La cuite est terminée du moment que le filet casse *sec;* dans ce cas la portion supérieure du filet se retire vers l'*index,* en formant une spirale, et ne rentre jamais en entier dans la masse qui adhère au doigt.

Dès qu'on reconnaît, par la *preuve,* que la cuite est à son terme, on couvre le feu et, quelques minutes après, on la verse dans le *rafraîchissoir,* en ayant l'attention de verser de haut pour y mêler de l'air; car l'on a reconnu que ce mélange d'air facilitait la cristallisation. La chaudière qu'on appelle *rafraîchissoir,* est un vase dans lequel on réunit successivement toutes les cuites qui se font en un jour.

Le soir, lorsque toutes les cuites sont faites et réunies dans le rafraîchissoir, on en remplit les formes qu'on appelle *bâtardes.* La cristallisation du sucre ne tarde pas à s'y opérer, et presque toujours elle est complète le lendemain, de manière que, vingt-quatre ou quarante-huit heures après la *mise en*

formes, on peut, sans inconvénient, porter les formes sur les pots pour faire couler la mélasse.

On reconnaît une bonne cristallisation lorsque la surface est sèche, que la pâte est bien grainée et point sirupeuse, et lorsque la surface de la base du pain de sucre se crevasse et se déprime vers le milieu, ce qui est connu sous le nom technique *de fontaine*.

Je passe sous silence plusieurs petits détails de procédé dont la description ne ferait qu'arrêter ma marche, et qui d'ailleurs sont inutiles ou superflus, parce qu'ils ne sont ignorés de personne qui se soit tant soit peu occupé de ces objets.

Je terminerai cet article par observer que, pour ne rien perdre dans les ateliers de sucrerie, on soumet à l'effort d'une presse à levier les écumes, les résidus des filtres et le dépôt des chaudières, pour en exprimer tout le suc qui y est contenu, et qu'on le verse, à mesure, dans les chaudières pour y suivre le cours des opérations.

Une observation très-importante à ne pas négliger, c'est qu'il faut se presser de travailler le suc de la betterave à mesure qu'on l'extrait. Si on le laisse reposer plusieurs heures, sur-tout quand il n'est pas concentré, il éprouve des altérations qui dénaturent le sucre, rendent son extraction plus difficile, et diminuent notablement la quantité.

ART. VI.

Du raffinage.

Je ne m'étendrai pas beaucoup sur le raffinage du sucre; les procédés en sont connus et bien décrits : je ne me permettrai que quelques détails sur les perfectionnemens qui y

ont été apportés, de nos jours, par les personnes qui se sont occupées de l'extraction du sucre de betterave.

M. *de Rosne* a proposé, le premier, de raffiner à l'alcohol; et ce procédé, qui est très-expéditif, convient d'autant mieux à une sucrerie de betteraves, qu'il dispense d'une foule d'usines nécessaires dans l'ancien procédé.

Lorsqu'on veut raffiner à l'alcohol, il faut avoir l'attention de procéder au raffinage, du moment qu'on a fait couler la mélasse : car, si on donne le temps au sucre de se dessécher, la mélasse qui en humecte les cristaux s'épaissit; elle forme une couche tres-dure sur la surface des cristaux, et l'alcohol la délaie avec beaucoup de peine.

En partant de cette observation, on procède au raffinage comme il suit : du moment que la mélasse est écoulée, on ratisse la surface du fond du pain de sucre contenu dans la forme, et on verse peu-à-peu, sur toute l'étendue de la surface, un litre d'alcohol à 36 degrés du commerce, après avoir bouché le petit orifice de la forme. On recouvre alors la base de la forme avec soin, pour éviter l'évaporation de l'alcohol. Deux heures après, on ouvre l'orifice de la forme, et l'alcohol coule, dans le pot, chargé d'une grande partie du principe colorant. On peut répéter l'opération avec moitié de nouvel alcohol, et le sucre équivaut alors, par la blancheur, au sucre terré ou à de la belle cassonnade. Alors on fond le sucre, et on le travaille à la chaudière avec le sang de bœuf. On termine l'opération ou en le terrant ou en l'alcoholisant; mais on a observé que, par le dernier de ces moyens, le sucre conservait un coup d'œil plus mat que par le premier, et qu'il était un peu plus friable : voilà pourquoi je fais la première opération par l'alcohol et la seconde par le terrage.

Les pains de sucre alcoholisés conservent de l'odeur pendant quelque temps; mais cette odeur disparaît par le séjour des pains à l'étuve, et même par la simple exposition au grand air.

Il est nécessaire d'employer l'alcohol concentré à 36 degrés; lorsqu'il est plus faible, il dissout une portion de sucre.

La totalité de l'alcohol n'est pas perdue; il suffit de le distiller pour le dépouiller de la mélasse qu'il a entraînée, et alors on peut le faire servir de nouveau.

On a proposé une autre méthode de raffiner le sucre qui ne m'a pas paru réunir les avantages de celle que je viens de décrire, pas même ceux de l'ancienne : elle consiste à dissoudre 100 parties de sucre brut, et à les traiter avec 10 pour cent de charbon et dix blancs d'œufs. Lorsque le pain est dans la forme, on fait couler à travers un et demi pour cent de sirop blanc.

CHAPITRE III.

Compte rendu, par dépenses et produits, d'une fabrication de sucre de betteraves.

Le procédé que je viens de décrire me paraît le plus sûr, le plus économique et le plus simple de tous ceux qui sont parvenus à ma connaissance; mais si le prix du sucre qui en est le produit était supérieur à celui du sucre de commerce provenant du Nouveau-Monde, ce serait, tout au plus, un fait nouveau pour la science et un objet de pure curiosité pour la société. Nous allons donc fournir un état très-exact de la dépense et de la recette, pour mettre chacun à portée de juger de l'importance de cette nouvelle branche d'industrie.

ARTICLE PREMIER.

De la dépense.

La dépense se compose 1° du prix de la betterave; 2° de la main d'œuvre pour l'extraction du sucre; 3° de l'intérêt de la mise de fonds pour former l'établissement; 4° de l'entretien des machines et usines; 5° de l'achat du combustible, charbon animal et autres petits objets employés dans la fabrique.

1° *Prix de la betterave.* La betterave se vend généralement 10 francs le millier; à ce prix l'agriculteur y a trouvé, jusqu'ici, un bénéfice raisonnable, sur-tout lorsqu'elle est cultivée dans de bons terrains.

En supposant une terre de qualité moyenne, mais propre cependant à produire du blé, on peut calculer ce que coûte la betterave d'après les bases suivantes. Nous nous bornerons à faire le calcul sur la culture d'un arpent.

1° Loyer d'un arpent	20 fr.
2° Deux labours profonds	24
3° Deux sarclages	20
4° Achat de graine	3
5° Semence et hersage	22
6° Arrachement et transport	40
7° Engrais	50
8° Impositions	5
TOTAL	184 fr.

Ici nous faisons supporter tous les frais à la betterave quoique nous ayons observé que les terres qui leur étaient consacrées fussent semées en blé vers le 15 octobre après

qu'on les a arrachées, et que nous pussions faire partager au blé les frais des deux premiers labours, du loyer, des impositions et du fumier. On sentira d'après cela, qu'on pourrait réduire d'un tiers les dépenses que nous passons sur le compte des betteraves.

On évalue généralement le produit moyen d'un arpent de betteraves à 20 milliers, ce qui établit le prix du millier pour l'agriculteur, à 9 fr. 20 c; mais, comme l'épluchement ôte près d'un dixième à la betterave, les 20 milliers se trouvent réduits à 18 lorsqu'elle entre en fabrication. Nous porterons donc le prix de la betterave à 10 fr. le millier pour le fabricant, en supposant toujours qu'il n'emploie que le produit de sa propre récolte.

Pour déterminer à-présent les autres frais, et avoir rigoureusement l'état de la dépense, nous supposerons qu'on travaille dix milliers de betteraves épluchées par jour.

1° Dix milliers de betteraves...............	100 fr.
2° Deux chevaux et un homme au manége...	9
3° Cinq femmes aux rapes.................	3
4° Quatre hommes aux presses............	6
5° Deux hommes aux chaudières...........	3
6° Charbon animal........................	10
7° Acide, chaux et sang de bœuf...........	2
8° Perte sur l'alcohol employé au raffinage...	4
9° Combustible..........................	12
TOTAL..........	149 fr.

Comme nous supposons que la fabrique ne travaille que quatre mois de l'année, il convient de

149 fr.

Report.........................	149 fr.
répartir, sur ces quatre mois, des dépenses d'une autre nature, telle que l'intérêt de la mise de fonds, l'intretien des ustensiles, le salaire du maître raffineur, etc. Ainsi, en supposant que l'établissement coûte 30,000 francs, ce qui est le *maximum* pour une fabrication de 10 milliers par jour, l'intérêt de la mise de fond réparti sur 120 jours de travail fait par jour....................................	16
Entretien des ustensiles et de l'usine..........	10
Salaire du raffineur et de l'ouvrier qui lui est attaché..	20
Menues dépenses..........................	5
TOTAL...........	200 fr.

La dépense de chaque jour pour l'exploitation de 10 milliers de betteraves est donc de 200 francs.

ART II.

Du produit d'une exploitation de 10 milliers (100 quintaux) de betteraves par jour.

Le produit de la fabrication se compose de trois objets distincts.

1° Le sucre;

2° Les résidus ou marc des betteraves;

3° La mélasse.

En général la betterave fournit de 3 à 4 pour cent de sucre brut, il y a même des fabriques qui en ont retiré de

4 à 5. La quantité varie en raison des chaleurs plus ou moins constantes de l'été, et sur-tout en raison de l'intelligence qu'on a apportée dans les travaux de fabrication.

Nous supposerons qu'on n'en extrait que 3 pour cent; 10 milliers de betteraves exploitées par jour donneront donc 3 cents livres de sucre brut qui, à raison d'une dépense de deux cents francs par jour, portent le prix du sucre brut à environ 13 sous ou 65 centimes la livre.

Indépendamment du produit du sucre, il en est un second qui mérite une grande considération; ce sont les épluchures et le marc des betteraves après qu'on en a exprimé le suc.

Les épluchures forment à-peu-près le dixième du poids de la betterave, elles sont composées des collets, des radicules, de quelques portions de la peau, et de la terre qui peut adhérer à la surface. Sur un millier d'épluchures, provenant de 10 milliers de betteraves, il y a au moins une bonne moitié qui fait une excellente nourriture pour les cochons qui en sont très-avides.

Le marc des betteraves forme un objet bien plus important. En supposant qu'on extraie 70 pour cent de suc de la betterave, l'exploitation de 10 milliers par jour fournit quinze cents kilogrammes ou environ trente quintaux de marc qui forment une nourriture très-précieuse pour les bêtes à corne. Cette nourriture qui est presque sèche n'a ni les inconveniens des herbes ou racines aqueuses, ni ceux des fourrages secs pour l'usage des bêtes à corne; elle ne produit point la pourriture comme les premières, et ne donne pas lieu à des obstructions, et n'échauffe pas comme les seconds; elle contient presque tous les principes nutritifs de

la betterave dont on n'a enlevé, en la travaillant, qu'environ soixante pour cent d'eau, trois pour cent de sucre, et un peu d'extractif et de gélatine.

Cette quantité de marc peut nourrir par jour 7 à 8 cents bêtes à laine.

Les bœufs, les vaches, les cochons, la volaille, dévorent cette nourriture qui les engraisse beaucoup mieux que tous les alimens connus; les brebis et les vaches laitières, soumises à ce régime, donnent beaucoup plus de lait et d'une excellente qualité.

Dans un domaine où l'on établirait une fabrique de l'importance de celle dont je parle, on peut engraisser par an 50 à 60 bœufs, ou 4 à 5 cents moutons, avec ces seuls résidus.

La mélasse est un troisième produit qui n'est pas à dédaigner. L'exploitation d'un millier de betteraves en fournit à-peu-près 240 livres par jour, qu'on peut vendre dans le commerce à raison de 10 à 15 francs le quintal ou les 50 kilogrammes, ou bien les faire fermenter et les distiller pour en extraire l'alcohol. Lorsqu'on prend le parti de distiller, on délaie la mélasse dans l'eau de manière à ce que la liqueur marque 7 à 9 degrés; on y mêle ensuite avec soin de la levure de bière, ou du levain de pâte d'orge délayé dans l'eau tiède, dans la proportion de deux livres de la première par 10 quintaux de liquide, et de 6 livres de la seconde.

Les cuviers qui contiennent cette liqueur à fermenter doivent être placés dans une étuve où la chaleur soit constamment à 16 ou 18 degrés du thermomètre centigrade. La fermentation ne tarde pas à s'annoncer, et elle est terminée en quelques jours. La distillation doit s'opérer dans les alam-

bics perfectionnés *d'Adam et de Bérard*, alors l'alcohol n'a aucun mauvais goût, et on peut l'obtenir au degré qu'on desire par une seule distillation. Cet alcohol a cela de particulier, c'est qu'au même degré de concentration il est infiniment plus piquant que tous les autres qui nous sont connus.

Cent litres de mélasse donnent, à-peu-près, trente trois litres d'alcohol à 22 degrés.

Avant de livrer le résidu aux bestiaux, on peut le faire fermenter en le délayant dans une quantité d'eau suffisante, et le distiller ensuite; par ce moyen on peut encore en extraire environ quatre pour cent d'alcohol; mais cette opération entraîne un embarras de manipulation qui me l'a fait abandonner; elle a donné lieu néanmoins à une observation que je ne puis passer sous silence pour éclairer ceux qui pourraient se trouver dans le même cas que moi. J'avais conçu l'idée de passer de l'eau sur les résidus pour m'en servir ensuite à délayer la mélasse; cette eau de lessive marquait de 2 à 4 degrés; je procédais ensuite à la fermentation par la méthode ordinaire.

La fermentation s'établissait facilement; lorsqu'elle était terminée, je soumettais la liqueur à la distillation; mais quelle fut ma surprise lorsque je vis que j'obtenais moins d'alcohol, et que, vers la fin de l'opération, la liqueur se boursoufflait et passait de la chaudière dans le serpentin! Je ne tardai pas à me convaincre que la mélasse n'avait point participé à la fermentation, qu'elle était demeurée intacte, et qu'il n'y avait que la lessive des résidus qui eût fermenté. Cette expérience, répétée plusieurs fois, m'a constamment donné les mêmes résultats. Il paraît que la mélasse se mêle sans s'allier

avec cette eau de lessive, et que cette dernière, subissant d'abord sa fermentation, arrête le mouvement de la première.

Les cendres des marcs fournissent à-peu-près un pour cent de potasse.

CHAPITRE IV.

Considérations générales.

On vient de voir par ce qui précède que la France peut fabriquer chez elle, à bas prix, tout le sucre dont elle a besoin pour sa consommation, mais il se présente ici trois ou quatre questions qu'il importe de soumettre à l'examen pour ne rien laisser à desirer sur une matière de cette importance.

1° Le sucre de la betterave est-il de la même nature que celui de la canne?

2° Quels avantages l'agriculture retirerait-elle des sucreries de betterave?

3° Est-il de l'intérêt de la France de fabriquer du sucre de betterave?

4° Pourquoi la plupart des établissemens qui s'étaient formés ont-ils été abandonnés?

ARTICLE PREMIER.

Le sucre de betterave est-il de la même nature que celui de canne?

Nous connaissons aujourd'hui trois espèces de sucre bien distinctes, toutes susceptibles de donner de l'alcohol par la

fermentation, mais différant entre elles par des propriétés particulières. L'état sous lequel se présentent ces trois espèces de sucre établit et constitue une de leurs principales différences: l'une est constamment à l'état liquide, l'autre à l'état d'une poudre qui n'est pas susceptible de cristallisation, et l'autre à l'état de cristaux très-réguliers.

La première espèce ou le sucre liquide existe dans la plupart des végétaux et des fruits; elle constitue les sirops lorsque le suc est convenablement rapproché par l'évaporation:

La seconde espèce se présente sous forme solide et sèche, mais sans être susceptible de cristallisation; le sucre du raisin est de ce genre, de même que celui du miel et celui qui provient de l'altération de l'amidon par l'acide sulfurique:

La troisième espèce est susceptible de cristalliser, et les cristaux présentent la forme d'un prisme tétraèdre terminé par un sommet dièdre; cette dernière espèce se trouve dans la canne à sucre, la betterave, l'érable à sucre, la châtaigne, la châtaigne d'eau, etc., etc.; cette dernière espèce est la plus estimée et la plus recherchée; 1° parce qu'elle a un goût plus franc; 2° parce que, sous le même poids, elle sucre davantage; 3° parce qu'elle est plus facile à employer et plus agréable à la vue.

Il n'existe pas aujourd'hui le moindre doute, dans l'esprit des hommes éclairés, sur la parfaite identité des sucres qui constituent la troisième espèce; et, lorsqu'on les a ramenés par le raffinage au même degré de blancheur et de pureté, la personne la plus prévenue ne peut y trouver aucune différence.

Sans doute lorsque, dès le commencement de la fabrication, on a versé dans le commerce des sucres de betteraves brûlés, mal préparés, mal raffinés, le consommateur a dû les proscrire et trouver, entre ces sucres et ceux de Hambourg ou d'Orléans, une très-grande différence; mais alors même l'homme instruit les a confondus dans la même espèce, et il a rapporté cette différence à l'imperfection du procédé naissant plutôt qu'à la nature des principes. Déja notre célèbre collègue, M. Haüy, avait prouvé que la forme des cristaux était la même; déja plusieurs fabriques présentaient des résultats analogues à ceux des colonies, et il était naturel de penser que la même perfection s'établirait peu-à-peu dans tous les ateliers. On savait que, de tout temps, on a fabriqué des draps avec les mêmes matières, et que néanmoins les draps du Xe siècle n'étaient pas comparables à ceux du XVIIIe; on savait que chaque art a son enfance, mais qu'aujourd'hui cette enfance est de peu de durée par rapport aux progrès des lumières. Ce qu'on avait prédit est arrivé, et, en moins de deux ans, la fabrication s'est améliorée; elle s'est simplifiée au point qu'elle est aujourd'hui confiée à des ouvriers, et qu'il y a peu d'opérations qui présentent des résultats plus sûrs et plus constants. Aussi les produits des fabriques de betterave circulent-ils dans le commerce sans opposition, et le consommateur y met le même prix qu'au sucre de canne de qualité égale.

On a dit que ce sucre était plus léger que celui de canne et que par conséquent, sous le même volume, il sucrait moins. Quelque faible que soit cette accusation, il m'est impossible d'y souscrire; j'emploie les mêmes formes qu'à Orléans et chacune fournit un pain rigoureusement du même poids

que dans les raffineries d'Orléans. Depuis trois ans je n'emploie pas à ma table d'autre sucre que celui de ma fabrique, et il est peu de jours où des convives, qui ne s'en doutent pas, ne me fassent compliment sur la beauté et la bonté de ce sucre.

J'ai déja observé que le sucre raffiné à l'alcohol exhale, pendant quelque temps, une odeur désagréable ; ainsi, si on le met dans le commerce immédiatement après qu'il est raffiné, le consommateur sera en droit de se plaindre, de l'accuser, et de le repousser; c'est la faute, non du sucre, mais du fabricant qui doit laisser disparaître cette odeur d'alcohol avant de le mettre en vente.

Ainsi le sucre de betteraves et celui de canne, sont rigoureusement de même nature, et on ne peut établir entre eux aucune différence.

ART. II.

Avantages que l'agriculture peut retirer des sucreries de betterave.

L'agriculture ne peut que retirer un très-grand avantage de ces établissemens : tout ce qui varie les récoltes et en augmente le nombre est un bienfait pour l'agriculture; ainsi, sous ce rapport, la culture de la betterave lui est avantageuse : cette culture fournit en outre un moyen d'assolement de plus; et en faisant une récolte intermédiaire, ainsi que je le pratique, elle double le produit du fonds et ne fait pas perdre un grain de blé.

La culture de la betterave a encore l'avantage de rendre la terre plus meuble et de la nettoyer des mauvaises herbes par les sarclages.

La fabrication du sucre de betteraves n'est pas moins

utile à l'agriculture que la culture de cette plante: 1° les résidus ou le marc des betteraves peuvent fournir à la nourriture des bêtes à corne et des cochons d'un grand domaine pendant quatre mois d'hiver, novembre, décembre, janvier, et février.

En supposant qu'il y eût en France deux cents fabriques travaillant 10 milliers de betteraves par jour, les résidus suffiraient à l'engrais de 10 à 12 mille bœufs, ou de 80 à 100 mille moutons, et de 2 à 3 mille cochons.

2° Ces fabriques ont l'avantage d'occuper les chevaux et les hommes d'un domaine pendant la morte saison, et de donner du travail à des étrangers qui, durant ces quatre mois, seraient condamnés à l'oisiveté. Indépendamment des hommes employés à la culture de la betterave, l'épluchement de cette racine et l'extraction du sucre pourraient occuper les bras de 5 à 6 milles personnes pendant l'hiver, en supposant qu'il y eût deux cents fabriques en activité.

ART. III.

Est-il de l'intérêt de le France de multiplier les fabriques de sucre de betterave?

La France ne peut pas avoir d'autre intérêt que celui de ses habitans: ainsi tout ce qui augmente la masse du travail, qui multiplie les productions de la terre et de l'industrie, et enrichit l'agriculteur, ne peut que mériter une grande protection de la part de son gouvernement.

Ici se présente sans doute la grande considération des colonies, et je n'ai point la prétention de résoudre une question d'une aussi haute importance; je me bornerai à

présenter à ce sujet quelques vues que je soumets avec respect à la sagesse du gouvernement et aux hommes plus éclairés que moi.

Je ne dirai point, avec quelques écrivains, que le système colonial n'intéresse pas la nation, sous le prétexte que les colonies ne versent rien au trésor public, qu'elles sont une occasion de guerre toujours existante, qu'elles nécessitent l'entretien d'une marine très-dispendieuse, etc. Je sais que les colonies ouvrent un débouché aux produits de notre industrie et de notre sol, je sais qu'elles alimentent nos fabriques en matières premières, et qu'elles donnent une grande activité au commerce. Sous tous ces rapports, les colonies ont été jusqu'ici une des sources principales de la prospérité publique : mais, si tous ces avantages peuvent être reportés dans le sein de la France ; si la fabrication indigène du sucre et de l'indigo peut remplacer le sucre et l'indigo du Nouveau-Monde, au même prix et dans les mêmes qualités ; si cette nouvelle industrie augmente la masse du travail parmi nous et enrichit notre agriculture sans la priver d'aucun de ses produits ; il est évident qu'il reste, contre les colonies, sans compensation d'aucun intérêt majeur, les dépenses annuelles qu'elles occasionnent et les nombreuses chances de guerre qui, tout-à-coup, compromettent les fortunes et nous forcent à des privations lorsqu'une marine formidable ne peut pas dominer ou au moins rivaliser sur les mers.

On pourrait fortifier ces raisons de l'état actuel de nos colonies ; mais à Dieu ne plaise que je prétende détourner l'attention du gouvernement d'un aussi grand intérêt pour la métropole et de sa sollicitude paternelle pour les mal-

heureux colons qui ont été dépouillés de leurs propriétés ; je me borne à desirer pour le moment qu'il encourage les établissemens de sucre indigènes pour que leurs produits concourent avec ceux des colonies et que nous puissions reprendre, avec les étrangers, des relations commerciales, qui se bornaient à l'échange de nos denrées coloniales, surtout du sucre, contre les productions de leur sol. Cela devient d'autant plus important, que nos principaux rapports de négoce avec Hambourg et les peuples du Nord, consistaient en denrées coloniales qu'ils nous payaient en bois de construction, métaux, potasse, chanvre, lin et suif, et que, ces grands moyens d'échange venant à nous manquer, l'Angleterre doit hériter de cet immense commerce.

ART. IV.

Des causes qui ont déterminé la chûte de la plupart des établissemens qui s'étaient formés.

Les hommes qui ne jugent les arts que superficiellement, se persuadent que les fabriques de sucre de betterave ne peuvent pas soutenir la concurrence des fabriques de sucre de canne, et ils appuient aujourd'hui leur opinion sur la chûte de la plupart des établissemens qui s'étaient formés avant la paix. On pourrait se borner à leur répondre qu'il suffit que quelques-unes se soutiennent, malgré la concurrence des sucres étrangers, pour prouver que nos fabriques peuvent rivaliser ; mais je préfère indiquer ici les causes de cette chûte, et établir quelques principes qui puissent diriger les entrepreneurs dans les nouveaux établissemens qui pourront se former.

Lorsqu'on a commencé à extraire du sucre de la betterave, le gouvernement a excité le zèle de tous les Français par des encouragemens; par-tout on a semé des betteraves, et par-tout on a formé des établissemens sans consulter préalablement ni l'avantage du sol, ni le prix de la culture, ni la qualité saccharine de la racine. On a bâti, à grands frais, de vastes ateliers; on a acheté des rapes et des presses dont on ignorait l'effet; et souvent on est arrivé au moment de la fabrication sans se douter du procédé qui serait mis en usage, quelquefois même sans avoir fait choix d'un homme capable de conduire les opérations.

La marche raisonnée d'une nouvelle industrie n'est point celle qu'on a suivie; on a fait des pertes et on devait s'y attendre. Ici la betterave ne contenait plus de sucre au moment où on l'a travaillée, c'est ce qui a entraîné la chûte de tous les établissemens du midi; là on a employé de mauvais procédés, et on n'a extrait que des sirops; ailleurs, la culture ou l'achat de la betterave ont été si coûteux que le produit n'a pas balancé la dépense.

Cette manière irréfléchie de procéder a dû entraîner la chûte de la plupart des établissemens, et comme on raisonne d'après les résultats de son expérience, qu'elle soit bonne ou mauvaise, il s'est bientôt formé une opinion presque générale contre le succès de ces fabriques. D'un autre côté, la mauvaise qualité de sucre que quelques fabricans ont versé dans le commerce n'a pas peu contribué à dégoûter le consommateur.

Il eût mieux valu sans doute rechercher les causes de ce peu de succès, et tourner les yeux vers les établissemens qui prospéraient, pour étudier la bonne méthode; mais telle n'est

pas la marche de l'opinion publique en fait d'industrie: elle adopte souvent une nouveauté sans examen, comme elle la proscrit sans raison plus souvent encore. Néanmoins les essais répétés sur tous les points de la France ont présenté des résultats dont l'observateur a pu faire son profit; et ces essais nous ont enfin amenés à des connaissances positives sur la culture de la betterave, sur son produit et sur un procédé sûr, facile, et économique, pour en extraire tout le sucre.

L'expérience nous a encore appris que les établissemens de sucre de betterave ne pourraient prospérer qu'entre les mains des propriétaires qui récolteraient eux-mêmes les betteraves et consommeraient les résidus dans leurs domaines: il suffit en effet de jeter un coup d'œil sur les avantages que présente cette fabrication liée à une grande exploitation rurale pour sentir combien grande doit être la différence des résultats dans les deux cas.

1° Le propriétaire qui cultive la betterave l'obtient à plus bas prix que l'entrepreneur qui l'achète au cultivateur; cette différence est immense, sur-tout si on considère que, cette récolte étant intermédiaire, les frais de labour et de fumier peuvent être supportés par la récolte de blé qui succède.

2° Les résidus des betteraves peuvent nourrir presque toutes les bêtes à corne d'un grand domaine pendant les quatre mois les plus rigoureux de l'année: la vente de ces résidus ne produit pas à l'entrepreneur la moitié du bénéfice qu'en retire l'agriculteur en les consommant dans sa ferme.

3° Les transports, le travail du manége, et la plupart des opérations dans l'atelier, s'exécutent par les chevaux et les hommes de la ferme; tandis que l'entrepreneur est obligé de

tout créer, d'appeler tout du dehors, et cela, pour un temps limité, ce qui lui donne encore plus de désavantage.

4° La main d'œuvre est plus chère dans les villes où s'établit l'entrepreneur que dans les campagnes où réside le propriétaire.

5° Le combustible coûte constamment un peu plus dans les villes que dans les campagnes, sur-tout le bois, et quelques-unes des opérations peuvent être conduites avec ce combustible.

Ainsi ce nouveau genre d'industrie doit être établi dans les grands domaines: c'est là, et là seulement, qu'il peut obtenir une grande prospérité. Indépendamment des avantages que présentent ces localités, nous pourrions ajouter qu'il est rare que les bâtimens, dépendans d'une grande exploitation rurale, ne présentent pas assez de développement pour y fixer, sans frais de construction, cette nouvelle industrie. Je pourrais citer à l'appui trois établissemens de ce genre qui n'ont pas exigé une dépense de 300 francs en construction pour être annexés aux domaines, et ces trois établissemens prospèrent dans le moment actuel, ils viennent de rouvrir leur cinquième campagne.

Le grand propriétaire, accoutumé jusqu'ici à des récoltes faciles, se livrera peut-être encore difficilement à cette nouvelle exploitation parce qu'elle suppose des connaissances qu'il n'a pas; mais qu'il considère que nous avons fait tous les frais des tâtonnemens; que les procédés que nous venons de décrire sont faciles et sûrs; que les calculs que nous avons établis sont exacts et déduits de l'expérience: qu'il considère que les distilleries de grain ou de pommes de terre, formées dans presque tous les domaines du nord, exigent des connais-

sances presqu'aussi étendues, sans présenter néanmoins autant d'avantages puisque, outre la nourriture des bestiaux et le produit de l'alcohol plus abondans par les betteraves que par le grain, nous avons de plus que dans ces distilleries la production du sucre, et l'on verra qu'on peut à-la-fois améliorer son domaine et concourir à enrichir son pays d'un produit qui est devenu pour lui de première nécessité.

DE L'IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT,
IMPRIMEUR DU ROI ET DE L'INSTITUT, RUE JACOB, N° 24.


B 3 9015 00250 960 5
University of Michigan – BUHR


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 07015 5927

